SCHEDA DI RECUPERO SUI NUMERI RELATIVI

I numeri relativi sono l'insieme dei

numeri negativi (preceduti dal segno -)
numeri positivi (il segno + è spesso omesso)
lo **zero**.

Valore assoluto di un numero relativo n è:

n	se $n \geq 0$	es. $\lvert +3 \rvert = 3$
-n	se $n < 0$	es. $\lvert -4 \rvert = 4$

Due **numeri** sono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto, ma segni diversi.
Esempio : +3, -3

Lo zero è l'unico numero che coincide con il suo opposto

ESERCIZIO 1

numero	+1	-3	0	+3/2		1,25		1,2	-1/3	$-1,\overline{3}$		-1/2	
opposto					$0,\overline{5}$		-5				6		-3/4

ESERCIZIO 2

Completa le seguenti frasi con "**è**" oppure con "**non è**" oppure con "**può essere**".

1. La somma di due numeri relativi positivi ………………… un numero positivo
2. La somma di due numeri relativi negativi ………………… un numero positivo
3. La somma di due numeri relativi concordi ………………… un numero positivo
4. (numeri con lo stesso segno)
5. La somma di due numeri relativi discordi ………………… un numero positivo
6. (numeri con segni diversi)
7. La somma di due numeri relativi opposti ………………… un numero positivo
8. Il prodotto di due numeri relativi positivi ………………… un numero positivo
9. Il prodotto di due numeri relativi negativi ………………… un numero positivo
10. Il prodotto di due numeri relativi concordi ………………… un numero positivo
11. Il prodotto di due numeri relativi discordi ………………… un numero positivo

SOMMA DI NUMERI RELATIVI

1° Caso

Somma di numeri con lo stesso segno (CONCORDI): se i numeri da sommare hanno lo stesso segno, il risultato sarà un numero con lo stesso segno degli addendi e per valore assoluto la somma dei valori assoluti.

Esempi

$(+2)+(+4)=+6$ $\qquad$ $(-2)+(-1)=-3$

2° Caso

Somma di numeri con segni contrari (DISCORDI): se i numeri da sommare hanno segni contrari, il risultato sarà un numero che ha come segno quello dell'addendo con valore assoluto maggiore e come valore assoluto la differenza dei valori assoluti.

Esempi

$(+2)+(-4)=-2$ $\qquad$ $(+2)+(-1)=+1$

MOLTIPLICAZIONE DI NUMERI RELATIVI

Il **prodotto di due numeri relativi** è un numero che ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti, mentre il segno sarà positivi se i due numeri sono concordi, negativo se i due numeri sono discordi.

Esempi

$(-2)\times(-4)=+8$ $(+2)\times(-1)=-2$

ELEVAMENTO A POTENZA DI UN NUMERO RELATIVO

Per **elevare a potenza un numero relativo** si moltiplica il numero (la base) per se stesso tante volte quante indicate nell'esponente.

ATTENZIONE
Se l'**esponente è pari** il segno del risultato sarà sempre **positivo**.
Se **l'esponente è dispari** il segno del risultato sarà uguale a **quello della base**.

ESERCIZIO 3

a) $+7-\{-5\times(-3)+(-4)\times[-5-7\times(-2)]\}=$

b) $[-9+(12-7-2)+(-3-9)-(4-3-20)+7-10]^3=$

c) $[2\times(-3)-4+5\times2+(-4+1)]^2=$

SCHEDA DI RECUPERO SULLE FRAZIONI

FRAZIONI EQUIVALENTI

DEFINIZIONE: data una frazione $\frac{a}{b}$ si dice che $\frac{x}{y}$ è equivalente ad $\frac{a}{b}$ se e solo se $a \cdot y = b \cdot x$ (uguaglianza dei "prodotti in croce").

Esempio: $\frac{6}{4}$ è equivalente a $\frac{3}{2}$, infatti $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$

PROPRIETA' INVARIANTIVA DELLA DIVISIONE: due frazioni sono equivalenti se e solo se si ottengono l'una dall'altra moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una di esse per uno stesso numero diverso da zero.

Esempio: $\frac{24}{18}$ è equivalente a $\frac{48}{36}$ perché $\frac{48}{36} = \frac{24 \cdot 2}{18 \cdot 2}$

$\frac{24}{18}$ è equivalente a $\frac{4}{3}$ perché $\frac{4}{3} = \frac{24 : 6}{18 : 6}$

ESERCIZIO 1

Scrivi 5 frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$.

ESERCIZIO 2

Completa in modo da ottenere frazioni equivalenti: $\frac{2}{3} = \frac{.....}{27}$ $\quad \frac{0}{3} = \frac{.....}{7}$ $\quad \frac{.....}{.....} = \frac{36}{14}$

CLASSIFICAZIONE DI FRAZIONI

TIPI DI FRAZIONI:

- $\frac{a}{b}$ è apparente se a è multiplo di b Esempio: $\frac{16}{4}$
- $\frac{a}{b}$ è propria se a < b (e quindi $\frac{a}{b}$ <1) Esempio: $\frac{2}{3}$
- $\frac{a}{b}$ è impropria se a > b (e quindi $\frac{a}{b}$ >1) Esempio: $\frac{3}{2}$

ESERCIZIO 1

Scrivi nell'ordine una frazione impropria, una frazione propria e una frazione apparente.
(a)………………… (b)………………… (c)………………

CONFRONTO DI FRAZIONI

1. Se due frazioni confrontate hanno lo stesso denominatore, è minore quella con numeratore minore.

   Esempio: $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$
2. Se due frazioni hanno lo stesso numeratore, è minore quella con denominatore maggiore.

   Esempio: $\frac{7}{5} < \frac{7}{2}$
3. Se due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{x}{y}$ non hanno né numeratori né denominatori uguali, possiamo affermare che $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$ se $a \cdot y < b \cdot x$ e analogamente $\frac{a}{b} > \frac{x}{y}$ se $a \cdot y > b \cdot x$.

   Esempio: $\frac{6}{5} < \frac{7}{2}$ perché $6 \cdot 2 < 5 \cdot 7$ $\qquad \frac{3}{7} > \frac{2}{15}$ perché $3 \cdot 15 > 7 \cdot 2$

NOTA BENE

Ricorda che $\frac{a}{b}$ indica a : b, quindi per confrontare due frazioni puoi ricorrere alla divisione.

ESERCIZIO 1
Inserisci tra le seguenti coppie di frazioni il simbolo opportuno scelto tra < (minore) e > (maggiore) e scrivi a fianco se hai usato per stabilirlo la regola (1), (2) o (3)

$\frac{6}{7}.....\frac{3}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{7}.....\frac{5}{11}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}.....\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{6}{11}.....\frac{6}{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}.....\frac{3}{4}$

ESERCIZIO 2
Confronta le seguenti coppie di frazioni senza ricorrere alla divisione.

$\frac{3}{2}.....\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{13}{11}.....\frac{11}{13}$ $\qquad$ $5.....\frac{26}{5}$ $\qquad$ $\frac{15}{7}.....\frac{28}{4}$ $\qquad$ $\frac{7}{10}.....\frac{25}{3}$

SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE

ESERCIZIO 1
Completa la seguente tabella

frazione	frazione ridotta	operazione eseguita	
15/20	3/4	$\frac{15:5}{20:5}$	5 = M.C.D.(15,20)[1]
17/3			
-15/81			
27/6			
-18/16			
300/25			
-7/21			
64/40			
45/15			
-625/75			

[1] Come si calcola l'**M.C.D.**?

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) l' **M.C.D.** è il prodotto dei fattori comuni presi con il minimo esponente.

Esempio
Calcoliamo il M.C.D. tra 54 e 36.
Scompongo in fattori primi: $54 = 3^3 \cdot 2$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Prendo i fattori comuni con il minimo esponente: M.C.D.(54,36)= $2 \cdot 3^2$ =18

SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI

$\boxed{1° \text{ Caso}}$

Frazioni con lo stesso denominatore: la somma algebrica di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è una frazione con lo stesso denominatore che ha come numeratore la somma algebrica dei numeratori.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Esempio

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{2+5}{3}=\frac{7}{3} \qquad \frac{4}{5}-\frac{8}{5}=\frac{4-8}{5}=-\frac{4}{5}$$

$\boxed{2° \text{ Caso}}$

Frazioni con denominatore diversi: se i denominatori sono diversi si trasformano le frazioni in altre equivalenti con lo stesso denominatore e successivamente si procede come nel 1° caso.

Esempio

$$\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{4}{6}+\frac{7}{6}=\frac{4+7}{6}=\frac{11}{6} \qquad \frac{2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{8}{12}-\frac{9}{12}=\frac{8-9}{12}=-\frac{1}{12}$$

NOTA: come denominatore comune si prende il **m.c.m.** dei denominatori.[2]

ESERCIZIO 1

a) $-\left[-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{15}{16}-2\right)\right]=$

b) $\frac{7}{24}+\left(-8-\frac{1}{2}\right)-\left[1-\left(3-\frac{1}{8}\right)\right]=$

c) $-\frac{1}{3}-\left[1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]=$

---

[2] Come si calcola il **m.c.m.**?

c) si scompongono i numeri in fattori primi;
d) il **m.c.m.** è il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi con il massimo esponente.

Esempio
Calcoliamo il m.c.m. tra 54 e 36.
Scompongo in fattori primi: $54 = 3^3 \cdot 2$ e $36 = 2^2 \cdot 3^2$
Prendo i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente m.c.m.: $(54,36)=2^2 \cdot 3^3 =108$

MOLTIPLICAZIONE, DIVISIONE, ELEVAMENTO A POTENZA DI FRAZIONI

Moltiplicazione	Il prodotto di due frazioni è la frazione che ha come numeratore il prodotto dei numeratori delle due frazioni e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due frazioni. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$	$\frac{3}{4}\times\frac{7}{5}=\frac{3\times 7}{4\times 5}=\frac{21}{20}$
Divisione	Il quoziente di due frazioni è il prodotto della prima per l'inverso[3] della seconda. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$	$\frac{2}{3}:\frac{8}{9}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{18}{24}$
Elevamento a potenza	La potenza di una frazione è la frazione che si ottiene elevando a potenza il numeratore ed il denominatore della frazione data $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$

ESERCIZIO 2

a) $\left[\frac{4}{7}+3:\left(1-\frac{1}{7}\right)\times\frac{1}{7}\right]:\left(-\frac{15}{4}\right)=$

b) $-\frac{2}{3}:\left\{\left[-2+\left(1-\frac{4}{9}\right)\right]\times\frac{1}{26}\right\}+(-3):\left(-\frac{3}{4}+1\right)=$

c) $-12+\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^2:\frac{27}{(-2)^4}-\left[-2^5\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^3-10\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\right]\right\}=$

3

Due **numeri** si dicono **inversi** se il loro prodotto è uguale a 1.
L'**inverso di un numero intero** è una frazione che ha come numeratore 1 e come denominatore il numero dato.
L'**inverso di una frazione** è una frazione che ha il numeratore e il denominatore scambiati rispetto alla frazione data.
L'inverso di zero non esiste.

ESERCIZIO

numero	-1	+2	+1/2	-3/4		-5		-1/3	0,2			0	
inverso					1		-2			$-1,\overline{3}$	-2/3		1,5

ORDINE IN CUI SI ESEGUONO LE OPERAZIONI IN UNA ESPRESSIONE

Se in un'espressione numerica si trovano le quattro operazioni fondamentali e le potenze di numeri relativi, si eseguono nell'ordine:

- le potenze
- le moltiplicazioni e le divisioni <u>secondo l'ordine con cui si presentano</u>
- le addizioni e la sottrazioni secondo l'ordine con cui si presentano

Se l'espressione contiene parentesi, si inizia con il calcolo delle espressioni contenute nella parentesi più interne; dopo ciascun calcolo parziale, si trascrive per intero il resto dell'espressione e si continua con questo procedimento fino a completa eliminazione delle parentesi.

Esempio 1:
Calcoliamo per esercizio il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(-4)+\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^2:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot(-6)+\frac{10}{9}\right]^2=$$

$$\left[-\frac{1}{8}\cdot(-4)+\left(-\frac{8}{27}\right)\cdot\frac{9}{16}\right]^2:\left[\frac{8}{27}\cdot(-6)+\frac{10}{9}\right]^2=$$

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right]^2:\left[-\frac{16}{9}+\frac{10}{9}\right]^2=$$

$$\left[\frac{3-1}{6}\right]^2:\left[\frac{-16+10}{9}\right]^2=$$

$$\left[\frac{1}{3}\right]^2:\left[-\frac{2}{3}\right]^2=\left[-\frac{1}{3}:\frac{2}{3}\right]^2=\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right]^2=\left[-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$$

Esempio 2:

$$\left(-1+\frac{1}{5}\right):\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=$$

$$\left(\frac{-5+1}{5}\right):\left(\frac{36+6-20+3}{12}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{25}{12}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{12}{25}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=-4$$

NOTA
Ricorda che se l'espressione contiene una moltiplicazione seguita da una divisione o, viceversa, una divisione seguita da una moltiplicazione, le operazioni <u>devono</u> essere eseguite nell'ordine in cui sono scritte.
E' quindi errato effettuare le operazioni seguendo un ordine diverso da quello in cui compaiono.
Infatti nell'esempio precedente se si esegue prima il prodotto e solo in secondo tempo il quoziente, si avrà un risultato diverso come puoi osservare nei passaggi successivi.

$$\left(-1+\frac{1}{5}\right):\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=$$

$$\left(\frac{-5+1}{5}\right):\left(\frac{36+6-20+3}{12}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{25}{12}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{25}{12}\right)\cdot\left(\frac{125}{12}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right):\left(\frac{625}{144}\right)=\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{144}{625}\right)=-\frac{576}{3125}$$

ESERCIZI DI RIEPILOGO (nelle espressioni in cui compaiono le potenze utilizza le proprietà delle stesse[4])

a) $-\frac{2}{9}\left(-2-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{3}\left(-\frac{5}{2}+\frac{2}{5}+2\,\frac{3}{10}\right)$ $[-2]$

b) $\left[-\frac{4}{3}+\frac{8}{5}\left(\frac{3}{2}-2+\frac{9}{40}\,\frac{5}{3}\right)\right]\left(-\frac{15}{46}\right)-10\left(-\frac{2}{5}+\frac{3}{20}\right)$ $[3]$

c) $\frac{10}{3}-\frac{4}{5}\left\{-2+\frac{9}{5}\left[\left(-\frac{2}{9}+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{27}{44}\right)-\frac{1}{4}\right]\right\}-\frac{35}{6}$ $[0]$

d) $\frac{1}{4}-\frac{3}{11}\left\{\left[-\frac{1}{5}-\frac{8}{45}\left(\frac{1}{9}-\frac{11}{18}\right)-\frac{1}{72}\right]\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\right\}$ $\left[-\frac{1}{20}\right]$

e) $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{15}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right):\left(\frac{1}{4}+1-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{16}{5}+\frac{3}{10}\right):\left(-\frac{1}{3}\right)$ $\left[\frac{15}{2}\right]$

f) $\frac{4}{3}-\frac{5}{21}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{30}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{13}{24}\right):\left(-\frac{5}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{11}{9}\right]$

g) $\left\{\frac{1}{5}-\frac{80}{51}\left[\left(1-\frac{7}{25}\right):\frac{27}{20}-\frac{1}{4}\right]\right\}:\left[\frac{3}{5}-\frac{25}{14}\left(\frac{7}{30}-\frac{1}{6}\right):\frac{10}{49}\right]:\frac{55}{9}$ $\left[-\frac{12}{5}\right]$

h) $\left[\left(-\frac{3}{7}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{3}+1-\frac{2}{21}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{32}\right):\left(-\frac{21}{8}\right)-\frac{1}{3}\right]:$

$:\left\{\left[\left(\frac{1}{21}+\frac{4}{7}\right)-\frac{60}{7}:(-40)\right]\frac{11}{15}-\frac{1}{2}\right\}$ $\left[-\frac{21}{20}\right]$

i) $\left\{\left[-\frac{2}{5}\left(\frac{15}{2}-5\right)+3\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(4-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{2}{19}\right)\right]:\left(-\frac{2}{5}\right)+15\right\}:\left(-\frac{33}{2}\right)$

$\left[-\frac{7}{6}\right]$

e) $\left\{\left[\frac{1}{25}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right):\left(\frac{2}{3}-2\right)\frac{16}{15}\right]:\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\frac{7}{5}\right]\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right\}+\frac{5}{8}$ $\left[-\frac{15}{8}\right]$

f) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^5:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0$ $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]$

g) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^3:\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right\}^2:\left\{\left[(-2)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2:\frac{3}{8}\right\}^4$ $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)^6$ $\left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]$

[4] Per le proprietà delle potenze vedi anche “Scheda di recupero sulle potenze”

i) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10}:\left(\frac{2}{3}\right)^{7}\right]^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{6}$ $[1]$

j) $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{3}\right]^{2}:\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{6}\right]$ $[1]$

k) $\left\{\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^{4}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)^{2}\right]^{3}:\left(-\frac{5}{6}\right)^{9}\right\}^{2}:\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\right]^{2}$ $\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^{10}\right]$

l) $\left\{\left[\left(+\frac{7}{3}\right)^{10}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{6}\right]^{2}\cdot\left[\left(-\frac{7}{3}\right)^{8}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{3}\right]\right\}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{11}$ $\left[\frac{49}{4}\right]$

m) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{7}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3}:\left(\frac{1}{4}\right)^{7}-\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}:\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}$ $\left[\frac{13}{8}\right]$

n) $\left(-\frac{3}{10}\right)^{6}\cdot\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^{4}:\left(-\frac{3}{10}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\right]^{3}:\left[\left(-\frac{3}{10}\right)^{3}\right]^{4}$ $[1]$

o) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{2}\right]^{5}:\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{7}:\left(-\frac{1}{5}\right)^{4}\right]^{2}$ $[1]$

p) $\left\{\left[\left(+\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{2}\right\}^{3}\cdot\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{5}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{2}:\left\{\left[\left(+\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{7}\right\}^{2}$ $[1]$