

LE FUNZIONI MATEMATICHE E IL PIANO CARTESIANO

PREREQUISITI

- conoscere il concetto di insieme
- conoscere il concetto di relazione
- disporre i dati in una tabella
- rappresentare i dati mediante un grafico
- conoscere il concetto di equazione

CONOSCENZE

1. il piano cartesiano
2. il concetto di funzione
3. la funzione di proporzionalità diretta e la sua rappresentazione
4. la rappresentazione cartesiana di una funzione matematica lineare
5. la funzione di proporzionalità inversa e la sua rappresentazione
6. la proporzionalità quadratica

ABILITÀ

- A. applicare le principali formule del piano cartesiano
- B. riconoscere ed operare con le principali funzioni
- C. individuare e rappresentare nel piano cartesiano una funzione di proporzionalità diretta
- D. individuare e rappresentare nel piano cartesiano una funzione lineare
- E. individuare e rappresentare nel piano cartesiano una funzione di proporzionalità inversa
- F. individuare e rappresentare nel piano cartesiano la proporzionalità quadratica

PER RICORDARE

La rappresentazione cartesiana:

1. la **geometria analitica** è la disciplina che studia le figure geometriche mediante i metodi dell'algebra;
2. il **piano cartesiano** si compone di due rette orientate (verso destra e verso l'alto) tra loro perpendicolari che assumono il nome di **assi cartesiani**: asse delle **ascisse** (o delle x); asse delle **ordinate** (o delle y); il punto di intersezione degli assi è detto **origine**;
3. un **punto del piano** è individuato da una coppia $(x; y)$ di numeri; essi corrispondono alla distanza del punto dall'asse orizzontale e verticale; tale coppia prende il nome di **coordinate cartesiane**;
4. il **piano cartesiano** si divide in **quattro settori** o **quadranti**:
 - 1° quadrante: punti con ascissa e ordinata positiva;
 - 2° quadrante: punti con ascissa negativa e ordinata positiva;
 - 3° quadrante: punti con ascissa negativa e ordinata negativa;
 - 4° quadrante: punti con ascissa positiva e ordinata negativa;
5. la **distanza** tra due punti A e B :
 - di uguale ordinata è data dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto;
 - di uguale ascissa è data dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
 - generici nel piano si calcola costruendo un triangolo rettangolo avente per cateti le proiezioni del segmento AB sugli assi cartesiani e applicando il teorema di Pitagora;

6. le **coordinate del punto medio** M di un segmento AB sono date dalle semisomme delle ascisse e delle ordinate degli estremi del segmento;
7. per **rappresentare i poligoni** nel piano cartesiano basta individuare i vertici e unirli con spezzate, determinandone così i lati;
8. per calcolare il **perimetro** dei poligoni nel piano cartesiano basta determinare la misura dei lati mediante le formule per il calcolo della distanza fra due punti e sommare i risultati parziali ottenuti;
9. per calcolare l'**area** dei poligoni nel piano cartesiano basta determinare la misura delle dimensioni mediante le formule per il calcolo della distanza fra due punti e applicare le formule per il calcolo delle aree.

Le funzioni matematiche:

10. una **funzione** è una relazione \mathcal{R} da A verso B che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B ;
11. il **dominio** di una funzione f è l'insieme di elementi di A che sono in corrispondenza con almeno un elemento di B ; il **codominio** è l'insieme di elementi di B che sono in relazione con almeno un elemento di A ;
12. una **funzione matematica** è un tipo di funzione in cui il variare della grandezza y rispetto alla grandezza x avviene sulla base di un meccanismo che può essere espresso mediante una formula matematica;
13. una **funzione empirica** è un tipo di funzione che non è esprimibile mediante formule matematiche.

La funzione di proporzionalità diretta:

14. due grandezze si dicono **direttamente proporzionali** se raddoppiando, triplicando, dimezzando ... l'una, raddoppia, triplica, si dimezza anche l'altra;
15. due grandezze x e y direttamente proporzionali hanno **rapporto costante**: $\frac{y}{x} = m$;
16. la legge di **proporzionalità diretta** è rappresentata nel piano cartesiano da una **retta** passante per l'origine;
17. ogni funzione del tipo $y = mx$ rappresenta l'equazione della retta passante per l'origine; in essa m viene denominato **coefficiente angolare** e individua l'inclinazione o pendenza della retta rispetto all'asse x :
 - a. se $m > 0$ le rette del fascio appartengono al 1° e 3° quadrante;
 - b. se $m < 0$ le rette del fascio appartengono al 2° e 4° quadrante;
 - c. se $m = 1$ la retta è bisettrice del 1° e 3° quadrante;
 - d. se $m = -1$ la retta è bisettrice del 2° e del 4° quadrante;
18. ogni funzione del tipo $y = mx + q$, con m e q costanti, è rappresentata nel piano cartesiano da una retta; in essa m è il coefficiente angolare e q è l'**ordinata all'origine**;
19. $y = k$ (con k costante) è l'equazione di una retta parallela all'asse delle x ;
20. $x = h$ (con h costante) è l'equazione di una retta parallela all'asse delle y ;
21. due rette **parallele** hanno lo stesso coefficiente angolare $m = m'$;
22. due rette sono **perpendicolari** se il coefficiente angolare della prima è l'opposto e il reciproco del coefficiente dell'altro: $m = -\frac{1}{m'}$;
23. le **coordinate dei punti di intersezione di una retta**, di equazione $y = mx + q$, rispettivamente con gli assi x e y , si ottengono ponendo in essa $y = 0$ e $x = 0$ e calcolando i valori corrispondenti dell'ascissa e dell'ordinata;
24. l'equazione di una retta passante per due punti di coordinate note è: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$;
25. l'equazione di una retta passante per un punto P e di coefficiente angolare m è $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

La funzione di proporzionalità inverse e quadratica:

26. due grandezze si dicono **inversamente proporzionali** se raddoppiando, triplicando, dimezzando l'una, si dimezza, diventa un terzo, si raddoppia l'altra;
27. due grandezze x e y inversamente proporzionali hanno il **prodotto costante**: $y \cdot x = k$;

28. la legge di **proporzionalità inversa** è rappresentata nel piano cartesiano da una **iperbole equilatera**;
29. due grandezze x e y sono in **proporzionalità quadratica** quando la relazione che le lega è del tipo $y = ax^2$;
30. la **parabola** è l'insieme dei punti del piano descritti dall'equazione $y = ax^2$ con a costante diversa da zero; la parabola passa per l'origine degli assi ed ha come asse di simmetria la retta $x = 0$.

ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1 Completa la seguente definizione:
la geometria analitica è la disciplina che studia mediante
- 2 Un punto appartenente al secondo quadrante ha:
a. ascissa positiva e ordinata positiva;
b. ascissa negativa e ordinata positiva;
c. ascissa negativa e ordinata negativa.
- 3 La misura della distanza tra due punti A e B aventi uguale ordinata è data:
a. dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
b. dalla differenza delle rispettive ordinate;
c. dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto.
- 4 La misura della distanza tra due punti A e B aventi uguale ascissa è data:
a. dalla differenza delle rispettive ordinate in valore assoluto;
b. dalla differenza delle rispettive ordinate;
c. dalla differenza delle rispettive ascisse in valore assoluto.
- 5 Completa la seguente regola:
per determinare la distanza tra due punti generici A e B nel piano cartesiano si calcola la misura dell'ipotenusa del avente per cateti
- 6 Qual è la formula per calcolare le coordinate del punto medio di un segmento AB ?
a. $x_M = x_A + x_B$ e $y_M = y_A + y_B$;
b. $x_M = (x_A + x_B) \cdot 2$ e $y_M = (y_A + y_B) \cdot 2$;
c. $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.
- 7 Completa le seguenti definizioni:
a. una funzione è una relazione \mathcal{R} da A verso B che ad ogni elemento di A elemento di B ;
b. si chiama grandezza costante una grandezza i cui valori numerici;
c. si chiama grandezza una grandezza che può assumere diversi valori numerici;
d. la funzione matematica è un tipo di funzione in cui il variare rispetto alla x avviene sulla base di un meccanismo che può essere espresso mediante una;
e. le funzioni empiriche sono funzioni che mediante;
f. due grandezze sono direttamente proporzionali è costante.
- 8 Due grandezze si dicono direttamente proporzionali se:
a. raddoppiando, triplicando, l'una, l'altra si dimezza, diventa un terzo,;
b. raddoppiando, triplicando, l'una, l'altra raddoppia, triplica,;
c. non c'è un particolare legame tra le due grandezze.

9 Con quale tipo di grafico si rappresenta una proporzionalità diretta nel piano cartesiano?

10 Cosa rappresenta m nell'equazione di una retta espressa nella forma $y = mx$?

11 Completa la seguente proprietà.

La funzione $y = mx$ rappresenta un fascio di rette passanti per l'origine; in particolare:

- se $m < 0$ le rette appartengono al
- se $m > 0$ le rette appartengono al
- se $m = 1$ la retta è la
- se $m = -1$ la retta è la

12 Tanto più è alto il valore del coefficiente angolare m , tanto più l'inclinazione della retta tende a formare un angolo di:

- 45° rispetto al semiasse positivo delle ascisse;
- 180° rispetto al semiasse positivo delle ascisse;
- 90° rispetto al semiasse positivo delle ascisse.

13 Completa le seguenti proprietà:

- l'equazione $y = mx + q$ rappresenta
- l'equazione $y = k$ rappresenta una retta
- l'equazione $x = h$ rappresenta una retta

14 Due rette parallele:

- hanno lo stesso coefficiente angolare;
- hanno coefficienti angolari opposti e reciproci;
- hanno coefficienti angolari opposti.

15 Qual è la formula che permette di determinare l'equazione di una retta passante per due punti di coordinate note:

$$\text{a. } \frac{y_1 - y_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}; \quad \text{b. } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \text{c. } \frac{y + y_1}{y_2 + y_1} = \frac{x + x_1}{x_2 + x_1}.$$

16 Qual è la formula che permette di determinare l'equazione di una retta passante per un punto P e di coefficiente angolare m :

$$\text{a. } y - y_0 = m \cdot (x_0 - x); \quad \text{b. } y - y_0 = m : (x - x_0); \quad \text{c. } y - y_0 = m \cdot (x - x_0).$$

17 Completa la seguente definizione:

due grandezze si dicono inversamente proporzionali se raddoppiando, triplicando, dimezzando ... l'una, l'altra.

18 Due grandezze sono inversamente proporzionali se:

- il loro rapporto è costante;
- il loro prodotto è costante;
- la loro somma è costante.

19 Da quale curva è rappresentata nel piano cartesiano la legge della proporzionalità inversa?

20 Completa la seguente definizione:

due grandezze x e y sono in proporzionalità quadratica quando la relazione che le lega si può esprimere con una formula del tipo

21 Completa la seguente definizione:

una funzione del tipo $y = ax^2$ (con $a \neq 0$) è l'equazione di una avente come asse di simmetria e come vertice

- se $a > 0$ la concavità della curva è
- se $a < 0$ la concavità della curva è

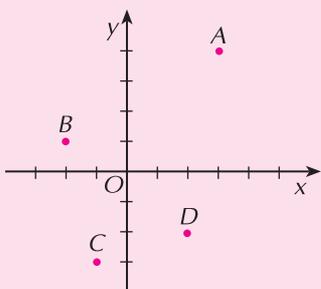
ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO BASE *

1 *Esercizio Svolto*

I punti nel piano cartesiano

Rappresenta in un piano cartesiano i punti $A(3; 4)$; $B(-2; 1)$; $C(-1; -3)$ e $D(2; -2)$.

Svolgimento



Il punto A ha i valori dell'ascissa e dell'ordinata entrambi positivi e si trova nel primo quadrante.

Il punto B ha il valore dell'ascissa negativo e quello dell'ordinata positivo e si trova nel secondo quadrante.

Il punto C ha i valori dell'ascissa e dell'ordinata entrambi negativi; si trova nel terzo quadrante.

Il punto D ha il valore dell'ascissa positivo e quello dell'ordinata negativo; si trova nel quarto quadrante.

2 Rappresenta in un piano cartesiano i punti $A(-1; 5)$; $B(-3; -2)$; $C(4; -1)$ e $D(3; 1)$.

3 *Esercizio Svolto*

La distanza di due punti

Calcola la distanza tra i punti $A(-4; -1)$ e $B(-1; 3)$.

Svolgimento

Applichiamo la formula relativa alla distanza:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

4 Calcola la distanza tra i punti $A(4; -1)$ e $B(-2; 2)$.

5 *Esercizio Svolto*

Il punto medio di un segmento

Calcola le coordinate del punto medio M del segmento di estremi $A(3; -4)$ e $B(-6; -2)$.

Svolgimento

Indichiamo con x_M e y_M le coordinate del punto medio M del segmento AB ed applichiamo le formule relative:

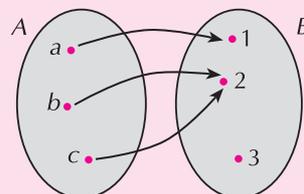
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 - 6}{2} = -\frac{3}{2} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 - 2}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \quad \text{quindi } M\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$$

6 Calcola le coordinate del punto medio M del segmento di estremi $A(-5; -1)$ e $B(-3; 5)$.

7 *Esercizio Svolto*

Il codominio di una funzione

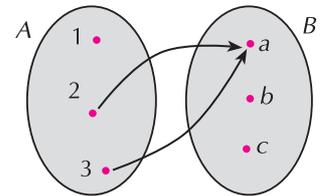
Osserva il diagramma a lato che rappresenta una funzione da A in B . Determina il codominio.



Svolgimento

L'insieme degli elementi di B che sono in relazione con almeno un elemento di A è formato dagli elementi 1 e 2. Quindi il codominio è $\{1; 2\}$.

- 8 Osserva il diagramma a lato che rappresenta una funzione da A in B . Determina il dominio e il codominio.

9 *Esercizio Svolto***La tabulazione di una funzione**

Dato il dominio $A = \left\{ \frac{1}{2}; -2; \frac{3}{4}; \frac{7}{5} \right\}$ e la funzione $y = 2x + \frac{3}{2}$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

Svolgimento

Per determinare i valori di y , basta attribuire alla variabile indipendente x la serie di valori numerici con $x \in A$ e ottenere così i corrispondenti valori della variabile dipendente y :

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x = -2 \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot (-2) + \frac{3}{2} = -4 + \frac{3}{2} = \frac{-8+3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x = \frac{7}{5} \quad \rightarrow \quad y = 2 \cdot \frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{14}{5} + \frac{3}{2} = \frac{28+15}{10} = \frac{43}{10}$$

La tabella richiesta è pertanto:

x	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{5}$
y	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	3	$\frac{43}{10}$

- 10 Dato il dominio $A = \left\{ -\frac{3}{2}; 3; \frac{1}{4}; -2; 7 \right\}$ e la funzione $y = \frac{1}{2}x + 2$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

11 *Esercizio Svolto***Le funzioni matematiche**

Ricava la funzione matematica relativa alla seguente tabella:

x	-2	-3	-4	-5	-6
y	6	9	12	15	18

Svolgimento

I valori della variabile y si ottengono moltiplicando i valori della variabile x per -3 ; pertanto la funzione matematica relativa è $y = -3x$.

- 12** Ricava la funzione matematica relativa alla seguente tabella:

x	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$

13 *Esercizio Svolto*

Le funzioni matematiche nel piano cartesiano

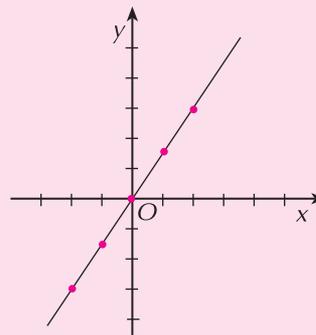
Rappresenta nel piano cartesiano la funzione $y = \frac{3}{2}x$.

Svolgimento

Fissiamo alcuni valori per la variabile indipendente x e determiniamo i corrispondenti valori della variabile dipendente y .

x	0	1	2	-2	-1
y	0	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$

Possiamo determinare il grafico della funzione costruendo la retta che passa per i punti evidenziati.



- 14** Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = -\frac{1}{3}x$.

15 *Esercizio Svolto*

Il coefficiente di proporzionalità diretta

Calcola il coefficiente di proporzionalità diretta corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	2	3	6
y	$\frac{2}{3}$	1	2

Svolgimento

Il coefficiente di proporzionalità diretta è dato dal rapporto $\frac{y}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, quindi tale rapporto vale $\frac{1}{3}$.

- 16** Calcola il coefficiente di proporzionalità diretta corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	1	$\frac{1}{2}$	6
y	2	1	12

17 *Esercizio Svolto*

La retta passante per due punti

Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(-2; 1)$ e $B(-3; -4)$.

Svolgimento

Basta sostituire nell'equazione $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ le coordinate dei punti A e B :

$$\frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+2}{-3+2} \rightarrow \frac{y-1}{-5} = \frac{x+2}{-1} \rightarrow \frac{y-1}{-5} = \frac{5x+10}{-5} \rightarrow$$

$$\rightarrow y-1 = 5x+10 \rightarrow y = 5x+10+1 \rightarrow y = 5x+11$$

18 Scrivi l'equazione della retta che passa per l'origine e per il punto $A(-5; 2)$.

19 Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(-3; 1)$ e $B(2; -2)$.

20 *Esercizio Svolto*

L'equazione di una retta

Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = +3$ passante per il punto $A(2; -1)$.

Svolgimento

La formula che consente di trovare l'equazione è $y - y_0 = m(x - x_0)$ dove m è il coefficiente angolare e x_0 e y_0 sono le coordinate del punto. Quindi avremo:

$$y + 1 = +3(x - 2) \rightarrow y + 1 = 3x - 6 \rightarrow y = 3x - 6 - 1 \rightarrow y = 3x - 7$$

21 Determina l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = -1$ passante per il punto $A(-3; -2)$.

22 *Esercizio Svolto*

Il coefficiente di proporzionalità inversa

Calcola il coefficiente di proporzionalità inversa corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	3	1	-3
y	5	15	-5

Svolgimento

Il coefficiente di proporzionalità inversa è dato dal prodotto $x \cdot y = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 15 = (-3) \cdot (-5)$, quindi tale coefficiente vale 15.

23 Calcola il coefficiente di proporzionalità inversa corrispondente alla coppia di valori x, y della seguente tabella:

x	$\frac{1}{3}$	1	-4
y	6	2	-0,5

ESERCIZI DI ABILITÀ \Rightarrow LIVELLO MEDIO **

1 *Esercizio Guidato*

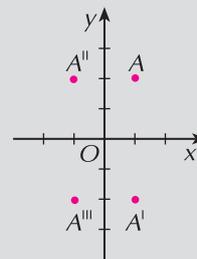
La simmetria in un piano cartesiano

Rappresenta in un piano cartesiano il punto $A(1; 2)$; traccia i suoi punti simmetrici rispetto all'asse x , all'asse y e all'origine e scrivi le rispettive coordinate.

Svolgimento

Per calcolare le coordinate del punto simmetrico di A:

- rispetto all'asse x basta cambiare il segno all'ordinata ottenendo il punto $A'(\dots; \dots)$;
- rispetto all'asse y basta cambiare il segno ottenendo il punto
- rispetto all'origine basta cambiare il segno ottenendo il punto



- 2** Rappresenta in un piano cartesiano il punto $A(2; -3)$; trova il punto A' simmetrico rispetto all'asse x, il punto A'' simmetrico rispetto all'asse y e A''' simmetrico rispetto all'origine.

3 *Esercizio Guidato***La distanza di due punti**

Calcola la distanza tra i punti $A(4; 10)$ e $B(-8; 5)$.

Svolgimento

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 + 8)^2 + (10 - \dots)^2} = \sqrt{\dots^2 + 5^2} = \sqrt{144 + \dots} = \sqrt{\dots} = 13.$$

- 4** Calcola la distanza tra i punti $A(1; -2)$ e $B(-3; 1)$.

5 *Esercizio Guidato***Il punto medio di un segmento**

Calcola le coordinate del punto medio M del segmento di estremi $A\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Svolgimento

Indichiamo con x_M e y_M le coordinate del punto medio M del segmento AB ed applichiamo le formule relative:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \dots}{2} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{\dots} = 1 \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-\dots + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{-1 + \dots}{4}}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \dots$$

Possiamo concludere che le coordinate del punto medio M sono $\left(1; \frac{5}{8}\right)$.

- 6** Calcola le coordinate del punto medio M del segmento di estremi $A\left(1; \frac{4}{3}\right)$ e $B\left(\frac{3}{4}; -2\right)$.

7 *Esercizio Guidato***Il codominio di una funzione**

Dato l'insieme $A = \{2; -3; 5\}$, dominio della funzione $f(x) = 3 \cdot x - 1$, determina il codominio.

Svolgimento

Per $x = 2 \rightarrow$ il corrispondente valore della y vale: $3 \cdot \dots - 1 = \dots - 1 = 5$

Per $x = -3 \rightarrow$ il corrispondente valore della y vale: $3 \cdot (-\dots) - 1 = \dots - 1 = \dots$

Per $x = 5 \rightarrow$ il corrispondente valore della y vale: $3 \cdot \dots - \dots = \dots - \dots = \dots$

Il codominio è dato quindi dall'insieme $B = \{5; -10; 14\}$.

- 8** Dato l'insieme $A = \{-1; 2; 4\}$, dominio della funzione $f(x) = -x + 2$, determina il codominio.

9 *Esercizio Guidato*

La tabulazione di una funzione

Dato il dominio $A = \left\{ \frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 2; -1 \right\}$ e la funzione $f(x) = -2x + \frac{1}{3}$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

Svolgimento

Per determinare i valori di y , basta attribuire alla variabile indipendente x la serie di valori numerici con $x \in A$ e ottenere così i corrispondenti valori della variabile dipendente y :

$$x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y = -2 \cdot \dots + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3+2}{\dots} = \dots$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y = -2 \cdot \dots + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{\dots + \dots}{\dots} = \dots$$

$$x = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad y = -2 \cdot \frac{\dots}{\dots} + \frac{1}{3} = -\frac{\dots}{\dots} + \frac{1}{3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -\dots \cdot \dots + \frac{1}{3} = -\dots + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad y = -\dots \cdot (-\dots) + \frac{\dots}{\dots} = \dots + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

La tabella richiesta è pertanto:

x
y	$-\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$

- 10** Dato il dominio $A = \left\{ 1; -\frac{2}{5}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ e la funzione $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ calcola il codominio e disponi i risultati ottenuti in una tabella.

11 *Esercizio Guidato*

Le funzioni matematiche nel piano cartesiano

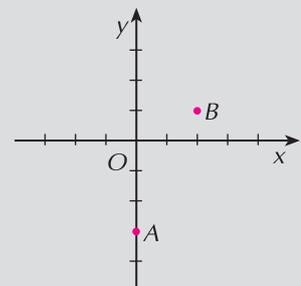
Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = 2x - 3$.

Svolgimento

Determiniamo i valori della variabile dipendente y dopo aver fissato quelli della variabile indipendente x .

x	0	3	2	-1	1
y	-3	1

Riporta sul piano cartesiano a lato i punti trovati e uniscili in modo da formare una

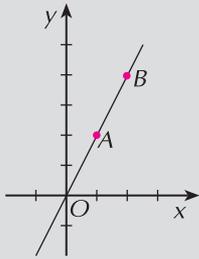


- 12** Rappresenta nel piano cartesiano la funzione matematica $y = -x + 2$.

13 *Esercizio Guidato*

Ricavare la funzione matematica dal grafico relativo

Dopo aver ricavato i valori di x e di y dal seguente diagramma cartesiano, individua la funzione matematica che esso rappresenta.

Svolgimento

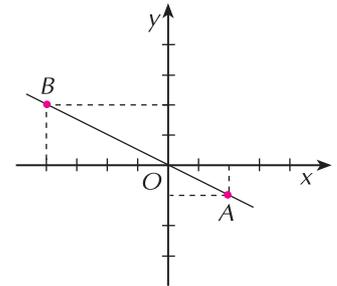
In base all'unità di misura del grafico, determiniamo i valori della variabile x e della variabile y , in corrispondenza di alcuni punti.

Otteniamo così alcune coppie di valori della funzione cercata: $A(1; \dots)$; $B(\dots; \dots)$.

Analizzando tali coppie rileviamo che in tutti i casi i valori della y sono il del corrispondente valore della x .

Pertanto la funzione matematica rappresentata dal grafico è $y = \dots x$.

- 14** Dopo aver ricavato i valori di x e di y dal seguente diagramma cartesiano, individua la funzione matematica che esso rappresenta.

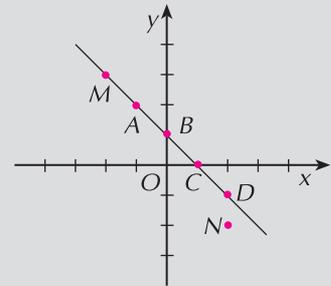
**15** *Esercizio Guidato***L'appartenenza di un punto ad una retta**

Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(-2; 3)$ e $N(2; -2)$ appartengono alla retta di equazione $y = -x + 1$.

Svolgimento**Verifica grafica**

Attribuiamo alla x valori appartenenti all'insieme Z compresi tra -2 e $+2$, calcoliamo i valori corrispondenti della y e costruiamo il relativo grafico.

- | | | |
|----------------|--|------------|
| • per $x = -2$ | $y = -(-2) + 1 = 2 + 1 = 3$ | $M(-2; 3)$ |
| • per $x = -1$ | $y = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$ | $A(-1; 2)$ |
| • per $x = 0$ | $y = -(...) + 1 = ... + 1 = 1$ | $B(0; 1)$ |
| • per $x = 1$ | $y = -(...) + ... = ... + 1 = 0$ | $C(1; 0)$ |
| • per $x = 2$ | $y = -(...) + ... = -... + ... = -...$ | $D(2; -1)$ |



Come possiamo notare, il punto $M(-2; 3)$ appartiene alla retta $y = -x + 1$; il punto $N(2; -2)$ a quest'ultima.

Verifica algebrica

Se nell'equazione $y = -x + 1$, sostituiamo, alla x ed alla y rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto $M(-2; 3)$, otteniamo: $3 = -(-2) + 1 \rightarrow 3 = 3$

Poiché le coordinate del punto M soddisfano l'equazione, possiamo affermare che esso alla retta $y = -x + 1$.

Ripetendo lo stesso procedimento per il punto $N(2; -2)$, otteniamo:

$$\dots = -2 + 1 \rightarrow -2 \neq -1$$

e quindi il punto non appartiene alla retta $y = -x + 1$.

- 16** Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(3; 2)$ e $N(-3; 2)$ appartengono alla retta r di equazione $y = -\frac{2}{3}x$.

17 *Esercizio Guidato*

Il punto di intersezione di due rette

Determina algebricamente le coordinate del punto di intersezione P delle rette di equazione $r : y = -x + 4$ e $s : y = 2x + 1$.

Svolgimento

Dopo aver verificato che le due rette r e s non sono parallele ($m_1 = -1$ e $m_2 = 2$) mettiamo in relazione di uguaglianza i due secondi membri delle equazioni delle rette e calcoliamo il valore della x :
 $-x + 4 = 2x + 1 \rightarrow -x - 2x = +1 - 4 \rightarrow -3x = \dots \rightarrow 3x = \dots \rightarrow x = 1$.

Sostituiamo ora il valore $x = 1$ in una delle due equazioni delle rette e calcoliamo così il valore della y :

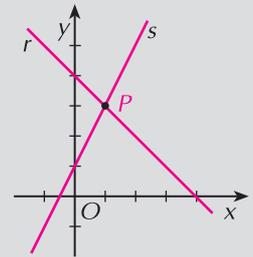
$$y = -x + 4 \qquad y = -1 + 4 \qquad y = \dots$$

Quindi il punto di intersezione P delle rette r e s ha come ascissa e ordinata rispettivamente 1 e 3, $P(\dots; \dots)$.

Notiamo che, sostituendo il valore $x = 1$ nell'equazione $y = 2x + 1$, avremo ancora ottenuto lo stesso risultato, infatti:

$$y = 2x + 1 \qquad y = 2 \cdot 1 + 1 \qquad y = 3.$$

Per comprendere meglio il risultato abbiamo inoltre rappresentato nel piano le due rette.



- 18** Determina algebricamente le coordinate del punto di intersezione P delle rette di equazione $r : y = 3x + 4$ e $s : y = 2x - 3$.

19 *Esercizio Guidato*

La retta passante per due punti

Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A(4; 1)$ e $B(1; 2)$.

Svolgimento

Per trovare l'equazione della retta passante per due punti A e B di coordinate note, basta sostituire nell'equazione $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ le coordinate dei punti A e B :

$$\frac{y - \dots}{2 - \dots} = \frac{x - \dots}{1 - 4} \rightarrow \frac{y - \dots}{1} = \frac{x - \dots}{\dots} \rightarrow y = -\frac{\dots}{\dots}x + \frac{4}{3} + \dots \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \dots$$

- 20** Scrivi l'equazione della retta che passa per i punti $A\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

21 *Esercizio Guidato*

L'equazione di una retta

Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = +\frac{3}{2}$ passante per il punto $A(1; -3)$.

Svolgimento

La formula che consente di trovare l'equazione è $y - y_0 = m(x - x_0)$. Quindi avremo:

$$y + 3 = +\frac{\dots}{\dots}(x - \dots) \rightarrow y + \dots = \frac{3}{2}x - \dots \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \dots - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \dots$$

- 22** Trova l'equazione della retta di coefficiente angolare $m = -\frac{1}{3}$ passante per il punto $A(3; -1)$.

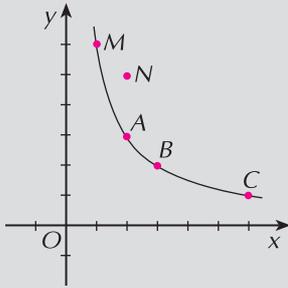
23 *Esercizio Guidato*

L'appartenenza di un punto ad un'iperbole equilatera

Verifica graficamente e algebricamente se i punti $M(1; 6)$ e $N(2; 5)$ appartengono all'iperbole equilatera $y = \frac{6}{x}$.

Svolgimento

Verifica grafica



Attribuiamo alla x dei valori numerici positivi, calcoliamo i corrispondenti valori della y e costruiamo il grafico:

- per $x = 1 \rightarrow y = \dots \rightarrow M(1; \dots)$
- per $x = 2 \rightarrow y = \dots \rightarrow A(\dots; \dots)$
- per $x = 3 \rightarrow y = \dots \rightarrow B(3; \dots)$
- per $x = 6 \rightarrow y = \dots \rightarrow C(\dots; \dots)$

Dal grafico si capisce che il punto $M(1; \dots)$ all'iperbole; mentre il punto $N(2; 5)$ a quest'ultima.

Verifica algebrica

Se nella funzione $y = \frac{6}{x}$ sostituiamo alla x e alla y rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto M , otteniamo:

$$y = \frac{6}{x} \quad \rightarrow \quad 6 = \frac{6}{1} \quad \rightarrow \quad 6 = 6.$$

Le coordinate di M soddisfano la funzione, possiamo affermare quindi che il punto M all'iperbole. Ripetendo lo stesso procedimento per il punto N , otteniamo $5 = \frac{6}{2}$: cioè il punto all'iperbole.

24 Verifica graficamente e algebricamente se i punti $B(2; 4)$ e $F(4; 5)$ appartengono all'iperbole equilatera $y = \frac{8}{x}$.

ESERCIZI DI ABILITÀ ⇒ LIVELLO AVANZATO ***

1 Rappresenta nel piano cartesiano i punti $A(-4; -1)$, $B(2; 7)$, $C(-5; 6)$, $D(-8; 2)$; stabilisci di che tipo di quadrilatero si tratta e calcola il perimetro e l'area.

2 Dati il dominio $A = \left\{ \frac{1}{2}; 3; \frac{4}{5}; -1 \right\}$ e la funzione $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$, determina il codominio.

3 Siano dati gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ e $B = \{-4; -8; -12; -16; -20\}$. Individua una possibile relazione \mathcal{R} da A in B tra gli elementi dei due insiemi facendo in modo di ottenere una funzione. Determina, inoltre, la formula matematica che lega le due variabili x e y e rappresenta la funzione con un diagramma cartesiano.

4 Dato il coefficiente di proporzionalità diretta $k = \frac{1}{2}$ completa la seguente tabella; determina la funzione matematica di proporzionalità e rappresentala graficamente in un piano cartesiano.

x	2	4	-1	-2
y				

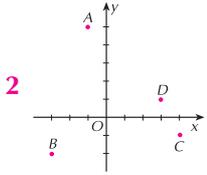
- 5** Verifica graficamente e algebricamente se il punto $P(2; 1)$ appartiene alla retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.
- 6** Determina, senza rappresentazione grafica, il punto in cui la retta $y = -\frac{3}{2}x + 4$ interseca l'asse y .
- 7** Determina graficamente ed algebricamente il punto di intersezione tra le rette r e s di equazione rispettivamente $y = 2x - 3$ e $y = -x + 3$.
- 8** Scrivi l'equazione della retta passante per i punti $A(3; -2)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 4\right)$.
- 9** Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$ e passante per $P(-1; 2)$.
- 10** Scrivi l'equazione della retta perpendicolare alla retta di equazione $y = \frac{2}{3}x + 1$ e passante per $P\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.
- 11** Rappresenta nel piano cartesiano la circonferenza di centro O passante per il punto $K(-8; 15)$; calcola quindi la misura della circonferenza e l'area del cerchio corrispondente.
- 12** Dato il coefficiente di proporzionalità inversa $k = 8$ completa la seguente tabella; determina la funzione matematica di proporzionalità e rappresentala graficamente in un piano cartesiano.
- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 4 | 8 |
| y | | | | |
- 13** Dati i punti del piano $A(1; 2)$ e $B(3; 6)$ verifica algebricamente se i punti A e B appartengono alla parabola $y = \frac{2}{3}x^2$.
- 14** Determina graficamente i punti di intersezione della parabola di equazione $y = 2x^2$ con la retta di equazione $y = 2x$.

SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI CONOSCENZA

- 1** le figure geometriche, i metodi algebrici. **2 b.** **3 c.** **4 a.**
- 5** triangolo rettangolo, le proiezioni del segmento AB sugli assi cartesiani.
- 6 c.**
- 7 a.** associa, uno ed un solo; **b.** non cambiano nel tempo; **c.** variabile;
d. della y , formula matematica; **e.** non sono esprimibili, formule matematiche; **f.** se il loro rapporto.
- 8 b.**
- 9** una retta passante per l'origine degli assi. **10** l'inclinazione rispetto all'asse x .
- 11 a.** 2° e 4° quadrante; **b.** 1° e 3° quadrante; **c.** bisettrice del 1° e 3° quadrante; **d.** bisettrice del 2° e 4° quadrante.
- 12 c.**
- 13 a.** l'equazione di una retta generica; **b.** parallela all'asse delle x ; **c.** parallela all'asse delle y .
- 14 a.** **15 b.** **16 c.**
- 17** si dimezza, diventa un terzo, si raddoppia. **18 b.** **19** iperbole equilatera.
- 20** $y = ax^2$.
- 21** parabola, l'asse y , l'origine degli assi, rivolta verso l'alto, rivolta verso il basso.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO BASE



- 2 $4 \sqrt{45} \approx 6,7$. 6 $M(-4; 2)$. 8 $D = \{2; 3\}; C = \{a\}$.

10

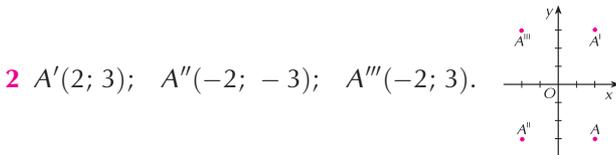
x	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	-2	7
y	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{17}{8}$	1	$\frac{11}{2}$



- 16 coefficiente = 2. 18 $y = -\frac{2}{5}x$. 19 $y = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$. 21 $y = -x - 5$. 23 coefficiente = 2.

VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO MEDIO

- 1 $A'(1; -2)$; all'ascissa, $A''(-1; 2)$; ad ascissa e ordinata, $A'''(-1; -2)$.



3 $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4 + 8)^2 + (10 - 5)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

4 5. 5 $x_M = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{4}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $y_M = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{-1 + 6}{4}}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

6 $M\left(\frac{7}{8}; -\frac{1}{3}\right)$. 7 $3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$; $3 \cdot (-3) - 1 = -9 - 1 = -10$; $3 \cdot 5 - 1 = 15 - 1 = 14$.

8 $B = \{3; 0; -2\}$.

9 $y = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{-3 + 2}{6} = -\frac{1}{6}$; $y = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3 + 1}{3} = \frac{4}{3}$;

$y = -2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-6 + 5}{15} = -\frac{1}{15}$; $y = -2 \cdot (2) + \frac{1}{3} = -4 + \frac{1}{3} = \frac{-12 + 1}{3} = -\frac{11}{3}$;

$y = -2 \cdot (-1) + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6 + 1}{3} = \frac{7}{3}$;

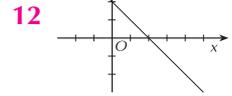
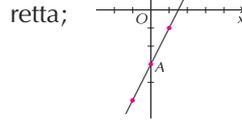
x	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	2	-1
y	$-\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{11}{3}$	$\frac{7}{3}$

10

x	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{17}{15}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$

11

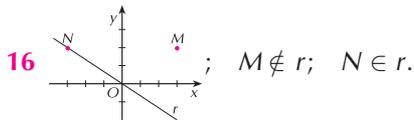
x	0	3	2	-1	1
y	-3	3	1	-5	-1



13 $A(1; 2)$, $B = (2; 4)$, doppio, $y = 2x$.

14 $y = -\frac{1}{2}x$.

15 $y = (-1) + 1 = 1 + 1 = 2$; $y = -(0) + 1 = 0 + 1 = 1$; $y = -(+1) + 1 = -1 + 1 = 0$;
 $y = -(+2) + 1 = -2 + 1 = -1$; non appartiene; appartiene; $-2 = -2 + 1$; N.



17 $-3x = -3 \rightarrow 3x = 3$; $y = 3$; $P(1; 3)$.

18 $P(-7; -17)$.

19 $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-4}{1-4} \rightarrow \frac{y-1}{1} = \frac{x-4}{-3} \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} + 1 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

20 $y = x + \frac{1}{2}$. **21** $y + 3 = \frac{3}{2}(x - 1) \rightarrow y + 3 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$.

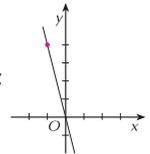
22 $y = -\frac{1}{3}x$.

23 $x = 1 \rightarrow y = 6 \rightarrow M(1; 6)$; $x = 2 \rightarrow y = 3 \rightarrow A(2; 3)$; $x = 3 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(3; 2)$;
 $x = 6 \rightarrow y = 1 \rightarrow C(6; 1)$; $M(1; 6)$ appartiene; non appartiene; appartiene; N non appartiene.

24 $4 = \frac{8}{2}$ vera $\rightarrow B \in$ iperbole; $5 = \frac{8}{4}$ falsa $\rightarrow F \notin$ iperbole.

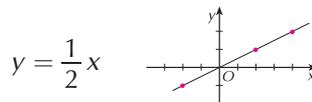
VALUTAZIONE DEGLI ESERCIZI DI ABILITÀ: LIVELLO AVANZATO

1 trapezio rettangolo; $2p = 27,07$; $A = 37,50$. **2** $C = \left\{ -\frac{1}{8}; \frac{7}{4}; \frac{1}{10}; -\frac{5}{4} \right\}$. **3** $y = -4x$;



4

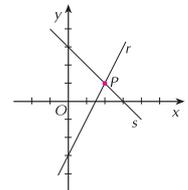
x	2	4	-1	-2
y	1	2	$-\frac{1}{2}$	-1



5 P appartiene alla retta.

6 $(0; 4)$.

7 $P(2; 1)$;



8 $y = -\frac{12}{5}x + \frac{26}{5}$.

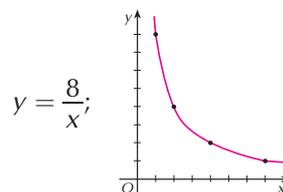
9 $y = 2x + 4$.

10 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$.

11 $C = 34\pi$; $A = 289\pi$.

12

x	1	2	4	8
y	8	4	2	1



13 A non appartiene alla parabola, B appartiene alla parabola.

14 $A(0; 0)$; $B(1; 2)$.