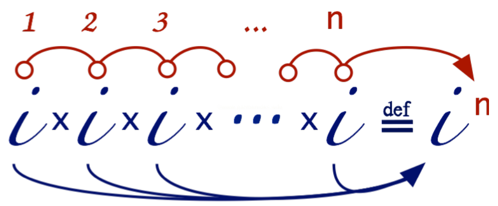
Le potenze dei Numeri Naturali (Interi positivi)

Le potenze rappresentano un tipo particolare di moltiplicazioni: le moltiplicazioni in cui tutti i fattori sono uguali, ad esempio $5\times5\times5\times5$ mentre una generica moltiplicazione è $5\times3\times9\times4$. Una potenza è definita nella maniera seguente: data una moltiplicazione di *n* numeri uguali (possono essere di qualsiasi tipo ma in queste pagine prenderemo in considerazione solo i Numeri Naturali) la rappresentiamo come potenza nella maniera seguente:

$$\overbrace{i\times i\times i\times\cdots\times i}^{n} \overset{def}{=} i^{n}$$

ovvero:



gli elementi che compongono la potenza si chiamano *base* ed *esponente*:

$$\text{Base} \longrightarrow 5^{4} \longleftarrow \text{Esponente}$$

Notate che, trattando di Numeri Naturali e moltiplicazioni, l'esponente è sempre un numero intero positivo (perché l'esponente rappresenta il numero di fattori nella moltiplicazione). Il simbolo $\overset{def}{=}$ indica che il primo membro è un modo nuovo per scrivere quello che è scritto a secondo membro, cioè che sono matematicamente la stessa cosa. Poiché sono la stessa cosa, la definizione può essere scritta anche al contrario:

$$i^n \stackrel{def}{=} \overbrace{i \times i \times i \times \cdots \times i}^{n}$$

Vediamo come viene definita la potenza in pratica con un esempio con numeri positivi:

$$5\times5\times5\times5 \stackrel{def}{=} 5^4 \qquad \overset{1}{5}\times\overset{2}{5}\times\overset{3}{5}\times\overset{4}{5} \stackrel{def}{=} 5^4 \quad \text{od anche} \quad 5^4 \stackrel{def}{=} 5\times5\times5\times5$$

Le operazioni con le potenze

Per studiare le operazioni con le potenze dobbiamo dividere quest'ultime in due gruppi:

1. potenze con basi uguali, come ad esempio:
   $5^4, 5^7, 5^{13}$
2. potenze con esponenti uguali, come ad esempio:
   $6^4, 15^4, 15^4$

potenze con basi uguali

Le principali operazioni che si possono fare con le potenze sono la *moltiplicazione*, la *divisione* e la *potenza di potenza*.

La moltiplicazione

Cominciamo dalla moltiplicazione, per semplicità useremo esponenti piccoli. Consideriamo le due potenze seguenti:

5^4, 5^2 ed effettuiamo la moltiplicazione: $5^4 \times 5^2$. Per procedere scriviamo le potenze come moltiplicazioni e quindi le ritrasformiamo in potenze:

$$5^4 \times 5^2 = \left(\overset{1}{5} \times \overset{2}{5} \times \overset{3}{5} \times \overset{4}{5}\right) \times \left(\overset{1}{5} \times \overset{2}{5}\right) = \overset{1}{5} \times \overset{2}{5} \times \overset{3}{5} \times \overset{4}{5} \times \overset{5}{5} \times \overset{6}{5} = 5^6$$

le parentesi sono state tolte applicando la proprietà associativa della moltiplicazione. Come si deduce facilmente dall'espressione, l'operazione si può riassumere come:

$$5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$$

Ricaviamo così la regola generale per la moltiplicazione di due potenze con base uguale:

Per qualunque Numero Naturale *i* e qualunque coppia di Numeri Naturali, maggiori o uguali a zero (vedremo più avanti quando parleremo della divisione perché può essere anche zero) *n*, *m*, il prodotto delle due potenze i^m e i^n è:

$$i^m \times i^n = i^{m+n}$$

La regola può essere facilmente estesa ad un numero qualunque di fattori:

Per qualunque Numero Naturale *i* e qualunque numero di Interi m_1, m_2, m_3, ..., m_n, maggiori o uguali a zero, il prodotto delle potenze i^{m_n} è dato da:

$$i^{m_1} \times i^{m_2} \times i^{m_3} \times \cdots \times i^{m_n} = i^{m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n}$$

È possibile definire potenze con esponente sia negativo che frazionario ma non siamo più nella classe dei Numeri Naturali e la loro definizione sarà data in altre pagine del sito.

La divisione

Come sempre le operazioni inverse pongono dei problemi maggiori di quelle dirette e ciò avviene anche nel caso della divisione di potenze. Dato che stiamo trattando con i Numeri Naturali il dividendo deve essere un multiplo del divisore. Dato che una potenza è una moltiplicazione con fattori tutti uguali è facile vedere che la condizione è che l'esponente del dividendo deve essere maggiore od uguale all'esponente del divisore.

Per procedere partiamo subito da un esempio pratico: effettuiamo la divisione $5^4 \div 5^2$.

Cominciamo con lo scrivere la divisione delle potenze come divisione delle rispettive moltiplicazioni:

$$5^4 \div 5^2 = \left(5 \times 5 \times 5 \times 5\right) \div \left(5 \times 5\right) =$$

Applichiamo la proprietà associativa così da dividere il primo insieme di moltiplicazioni in insiemi più piccoli in modo che l'ultimo sia uguale all'insieme di moltiplicazioni del divisore:

$$= \left(5 \times 5\right) \times \left(5 \times 5\right) \div \left(5 \times 5\right) =$$

adesso mettiamo in evidenza, mettendoli tra parentesi quadre, l'ultimo insieme di moltiplicazioni del dividendo, l'operazione di divisione e l'insieme di moltiplicazioni del divisore:

$$= \left(5 \times 5\right) \times \left[\left(5 \times 5\right) \div \left(5 \times 5\right)\right] =$$

Attenzione! Questa operazione non è sempre possibile quando trattiamo Numeri Naturali. È necessario verificare sempre che il risultato della divisione sia intera. Per essere chiari facciamo un esempio negativo: consideriamo l'espressione $5\times2\div5$. Il risultato di questa espressione è 2 ed è perfettamente lecita nella classe dei Numeri Naturali ma se proviamo ad effettuare la divisione prima della moltiplicazione $5\times(2\div5)$ troviamo che il risultato di $(2\div5)$ non è un Numero Naturale e, quindi, non è possibile procedere!
In questo caso però ci siamo assicurati che i due termini della divisione siano uguali e possiamo andare avanti:

$$=(5\times5)\times[1]=(5\times5)=5\times5=5^2$$

Riporto qui di seguito l'intero procedimento:

$$5^4\div5^2=(5\times5\times5\times5)\div(5\times5)=(5\times5)\times(5\times5)\div(5\times5)=$$
$$=(5\times5)\times[(5\times5)\div(5\times5)]=(5\times5)\times[1]=(5\times5)=5\times5=5^2$$

Come per la moltiplicazione, possiamo dedurre una regola generale per calcolare la divisione tra potenze senza la necessità di trasformarle in moltiplicazioni:

$$5^4\div5^2=5^{4-2}=5^2$$

La divisione tra due potenze con basi uguali si calcola semplicemente sottraendo i rispettivi esponenti.
Facciamo un altro esempio interessante: effettuiamo la divisione $5^3\div5^2$:

$$5^3\div5^2=(5\times5\times5)\div(5\times5)=5\times(5\times5)\div(5\times5)=$$
$$=5\times[(5\times5)\div(5\times5)]=5\times[1]=5$$

Come si vede, il risultato ottenuto trasformando le potenze nelle moltiplicazioni corrispondenti è *5*.

Applichiamo, adesso, alla stessa divisione la regola, che abbiamo dedotto sopra, che ci permette di non passare per le moltiplicazioni corrispondenti alle potenze:

$$5^3 \div 5^2 = 5^{3-2} = 5^1$$

In questo caso il risultato è 51! Ma 51 non è stato definito perché, come abbiamo visto sopra, il risultato non è una moltiplicazione.

Per far sì che possiamo applicare la regola sulla sottrazione delle potenze possiamo, ed è quanto si fa, porre per definizione $5^1 \stackrel{\text{def}}{=} 5$:

$$5^1 \stackrel{\text{def}}{=} 5$$

Poiché il numero scelto non è particolare possiamo estendere la definizione a qualsiasi numero:

$$i^1 \stackrel{\text{def}}{=} i$$

Facciamo un ultimo esempio notevole $5^2 \div 5^2$ cioè dividiamo due potenze uguali:

$$5^2 \div 5^2 = (5 \times 5) \div (5 \times 5) = 1$$

Il risultato ottenuto trasformando le potenze in moltiplicazioni è *1*, come ci si poteva aspettare dividendo due numeri uguali.

Effettuiamo lo stesso calcolo applicando la regola per le potenze:

$$5^2 \div 5^2 = 5^{2-2} = 5^0$$

Il risultato è 5^0 <u>che</u>, come nel caso precedente, <u>non è definito</u>. E, come prima, procediamo a definirlo per rendere la regola sulle potenze coerente, poniamo per definizione:

$$5^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

Poiché il numero scelto è possiamo estendere la definizione a qualsiasi numero diverso da zero:

$$i^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$$

∀ *i* ≠ *0* (che si legge: per qualunque *i* diverso da zero; ricordiamo che qui *i* è un numero intero positivo).

0^0 non è definito; infatti, poiché *0* moltiplicato qualsiasi numero fa *0* mentre $i^0=1$, per $i=0$ si ottiene una contraddizione che non è ammessa in matematica (almeno non dovrebbe essere ammessa!).

Abbiamo così giustificato la presenza nella regola per la moltiplicazione di potenze dello *0* tra i valori possibili dell'esponente.

Generalizziamo i risultati, come abbiamo fatto per le moltiplicazioni. Per qualunque Numero Naturale *i* (diverso da zero) e qualunque coppia di Numeri Naturali (compreso lo zero) *n*, *m*, con $m \geq n$ la divisione delle due potenze i^m e i^n è:

$$i^m \div i^n = i^{m-n}$$

∀ i ≠ 0.

La regola può essere estesa ad un numero qualunque di fattori:

Per qualunque Numero Naturale *i* e qualunque numero di Numeri Naturali m, m_1, m_2, ..., m_n, maggiori o uguali a zero, con la condizione che $m \geq m_1+m_2+ \dots +m_n$, la divisione delle potenze $i^m \div i^{m_1} \div i^{m_2} \div \dots \div i^{m_n}$ è dato da:

$$i^m \div i^{m_1} \div i^{m_2} \div \dots \div i^{m_n} = i^{m-m_1-m_2-\cdots-m_n}$$

∀ i ≠ 0.

La potenza di potenza

Così come una moltiplicazione di numeri tutti uguali può essere espressa come potenza così anche una moltiplicazione di potenze tutte uguali può essere espressa come potenza. Ad esempio:

$$3^2 \times 3^2 = \left(3^2\right)^2$$

Se sviluppiamo il membro sinistro dell'equazione seguendo le regole per la moltiplicazione delle potenze (e ricordandoci che la somma di numeri uguali può essere espressa come moltiplicazione), troviamo:

$$3^2 \times 3^2 = 3^{2+2} = 3^{2\times2} = 3^4$$

Confrontando il risultato con il secondo membro otteniamo:

$$\left(3^2\right)^2 = 3^{2\times2} = 3^4$$

Proviamo adesso con una moltiplicazione di tre potenze uguali:

$$3^2 \times 3^2 \times 3^2 = \left(3^2\right)^3$$

anche qui sviluppiamo il primo membro sfruttando le regole che già conosciamo ...:

$$3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2\times3} = 3^6$$

... e confrontiamo il risultato con il secondo membro:

$$\left(3^2\right)^3 = 3^{2\times3} = 3^6$$

Troviamo così la regola per calcolare la potenza di potenze:

$$\overbrace{i^m \times i^m \times \dots \times i^m}^{n} \stackrel{def}{=} \left(i^m\right)^n = i^{m\times n}$$

La potenza di potenze può essere definita anche per potenze di potenze di potenze, ecc. Mostriamo qui di seguito il caso successivo:

$$\underbrace{(i^m)^n \times (i^m)^n \times \cdots \times (i^m)^n}_{p} \stackrel{def}{=} \left[(i^m)^n\right]^p = i^{m \times n \times p}$$

La regola si estende facilmente ai casi con un annidamento maggiore.

potenze con esponenti uguali

Il caso della moltiplicazione e della divisione delle potenze con basi diverse e con esponenti uguali è molto più limitato.

La regole generali per i due casi sono:

$$i^m \times j^m = (i \times j)^m \qquad\qquad i^m \div j^m = (i \div j)^m$$

$\forall\ i,j \in \aleph.$

Vediamo con qualche esempio come si ricavano. Esprimiamo le potenze come moltiplicazioni:

$$5^4 \times 7^4 = (5 \times 5 \times 5 \times 5) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7) =$$

togliamo le parentesi ed applichiamo la *proprietà commutativa* della moltiplicazione per disporre i *5* e i *7* in coppia:

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 5 \times 7 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 \times 5 \times 7 =$$

riuniamo le coppie con le parentesi e, quindi, le possiamo esprimere come potenza:

$$= (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7) \times (5 \times 7) = (5 \times 7)^4 =$$

infine possiamo effettuare la moltiplicazione all'interno della parentesi (le moltiplicazioni all'interno delle parentesi potevano essere effettuate anche prima ma si è preferito far vedere chiaramente come possono essere considerati dei fattori le moltiplicazioni in parentesi):

$$=(35)^4=35^4$$

Facciamo l'esempio con la divisione. La condizione è, naturalmente, che il dividendo deve essere un multiplo del divisore:

$$6^2 \div 3^2=(6\times 6)\div(3\times 3)=$$

applichiamo la regola distributiva della divisione nei confronti della moltiplicazione:

$$=6\times 6\div 3\div 3=6\times(6\div 3)\div 3=$$

raggruppiamo il *6* ed il *3* ed applichiamo la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$=(6\div 3)\times 6\div 3=(6\div 3)\times(6\div 3)=$$

e concludiamo come per la moltiplicazione:

$$=(6\div 3)^2=(2)^2=2^2.$$