1 INSIEMI

INTORNO A NOI

I professori che insegnano in una scuola, gli ingredienti di una ricetta, l'attrezzatura della sala di un ristorante, il personale di una struttura alberghiera sono alcuni esempi di insieme.

1. CHE COS'È UN INSIEME

INSIEMI E LORO RAPPRESENTAZIONI Esercizi a pagina **8**

Un **insieme** è un raggruppamento ben definito di oggetti. Ognuno di questi oggetti è un **elemento** dell'insieme e diciamo che **appartiene** all'insieme.
Per poter parlare di un insieme, e operare con esso, è necessario sapere con certezza se un qualsiasi oggetto appartiene o non appartiene all'insieme.

A **set** is a collection of objects (*not* necessarily physical ones) that are called **elements** of the set.

- Sono insiemi
  «Le pietanze che fanno uso di pomodoro»,
  «Le bevande contenenti meno del 5% di zucchero»,
  «I campeggi italiani dotati di piscina»,
  «I numeri pari»,
  poiché la loro costruzione si basa su *criteri oggettivi*.
- Non sono insiemi
  «I cibi saporiti»,
  «Le bevande contenenti poco succo d'arancia»,
  «Gli agriturismi più belli d'Italia»,
  «I numeri con tante cifre»,
  poiché le informazioni fornite non sono sufficienti per stabilire con certezza quali oggetti fanno parte del raggruppamento e ognuno di noi potrebbe considerare *elementi diversi*.

Per descrivere un insieme possiamo fornire la **proprietà caratteristica**, oppure procedere per **elencazione**, scrivendo tutti gli elementi dell'insieme separati da virgole e fra parentesi graffe. Indichiamo un insieme con una lettera maiuscola; usiamo il simbolo $\in$, «appartiene», per dire che un oggetto è un elemento dell'insieme, e il simbolo $\notin$, che significa «non appartiene», per dire che l'oggetto non è un elemento dell'insieme.

Se $A = \{a, b, c, d\}$:

appartiene
$a \in A$ insieme
elemento

$g \notin A$
non appartiene

Proprietà caratteristica	**Elencazione**	$\in$ **o** $\notin$
le articolazioni della scuola alberghiera	$S = \{$sala e vendita, enogastronomia, accoglienza turistica, prodotti dolciari$\}$	enogastronomia $\in S$ cucina orientale $\notin S$

Se rappresentiamo un insieme per elencazione, ogni elemento deve essere presente una sola volta nell'elenco.
L'ordine con cui gli elementi compaiono non ha importanza.

Facciamo riferimento ai diversi insiemi numerici che hai già incontrato usando per ognuno una lettera. $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali, $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali.

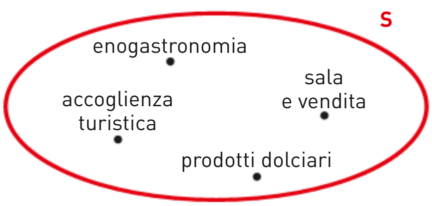
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\dots, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$

Rappresentiamo graficamente un insieme con un **diagramma di Eulero-Venn** o, più brevemente, **diagramma di Venn**.

■ Tracciamo il diagramma di Venn dell'esempio precedente.



Esistono **insiemi finiti**, con un numero finito di elementi come l'insieme S, e **insiemi infiniti**, con un numero infinito di elementi, come per esempio $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Usiamo una lettera minuscola per indicare un elemento generico di un insieme; inoltre, spesso possiamo scrivere in modo sintetico la proprietà caratteristica come nell'esempio seguente.

■ $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$ indica l'insieme $\{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$.
si legge: «tale che»

Il simbolo	significa
$<$	minore
$>$	maggiore
$\leq$	minore o uguale
$\geq$	maggiore o uguale
$=$	uguale
$\neq$	diverso

Chiamiamo **insieme vuoto** un insieme che non ha elementi e lo indichiamo con $\varnothing$.

■ L'insieme degli alberghi italiani a 6 stelle è l'insieme vuoto.

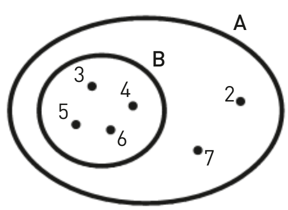
SOTTOINSIEMI

Esercizi a pagina 9

DEFINIZIONE

- Se ogni elemento di B appartiene ad A, diciamo che B è **sottoinsieme** di A; indichiamo questo con:
  $B \subseteq A$.
  Diciamo anche che B è **incluso** in A.
- Se B è sottoinsieme non vuoto di A e almeno un elemento di A non appartiene a B, diciamo che B è **sottoinsieme proprio** di A; indichiamo questo con:
  $B \subset A$.
  Diciamo anche che B è incluso **strettamente** in A.

ESEMPIO



$B \subseteq A$ perché se $x \in B$, allora $x \in A$;
$B \subset A$ perché $B \subseteq A$ e, per esempio, $2 \in A$ ma $2 \notin B$.

Il simbolo $\not\subset$ indica che un insieme non è sottoinsieme di un altro.

Ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, ma non sottoinsieme proprio.
L'insieme vuoto è sottoinsieme di un qualsiasi insieme, ma non sottoinsieme proprio.
Diciamo anche che, per un insieme A, l'insieme vuoto e l'insieme A sono **sottoinsiemi impropri**.
Due insiemi A e B sono **uguali**, e scriviamo $A = B$, se hanno gli stessi elementi. $A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$: ogni elemento di A appartiene a B e viceversa.

$A \subseteq A$ insieme qualsiasi
$\varnothing \subseteq A$

ESEMPIO Caffè o cappuccino?

Consideriamo:

$A = \{x \mid x$ è un ingrediente del cappuccino classico$\}$,

$B = \{x \mid x$ è un ingrediente del caffè macchiato$\}$.

▸ **Come sono A e B?**

$A = B$ poiché entrambi sono costituiti da acqua, miscela di caffè e latte.

2. OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

UNIONE E INTERSEZIONE

Esercizi a pagina 10

Given two sets A and B, we can consider their **union**, a set that contains *all* the elements of both A and B, or their **intersection**, a set that contains *only* the elements that belong to both sets.

DEFINIZIONE

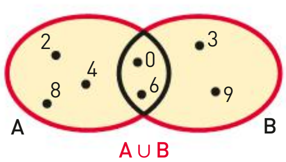
Dati gli insiemi A e B:

- l'**unione** di A e B è l'insieme $A \cup B$ degli elementi che appartengono ad A **o** a B;
  $\boldsymbol{A \cup B = \{x \mid x \in A}$ **o** $\boldsymbol{x \in B\}}$
- l'**intersezione** di A e B è l'insieme $A \cap B$ degli elementi che appartengono ad A **e** a B.
  $\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A}$ **e** $\boldsymbol{x \in B\}}$

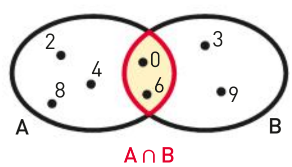
ESEMPIO

Consideriamo, fra i numeri naturali minori di 10, in A i multipli di 2 e in B i multipli di 3.

$A \cup B$ contiene i multipli di 2 **o** di 3.



$A \cap B$ contiene i multipli di 2 **e** di 3.



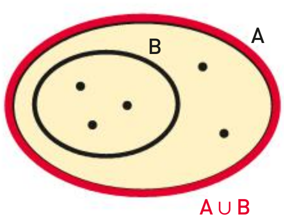
La congiunzione **o** che utilizziamo nell'unione corrisponde al connettivo logico che si indica con $\vee$, la congiunzione **e** dell'intersezione corrisponde al connettivo logico $\wedge$.

■ Se A è la proposizione «Oggi studio inglese» e B è «Oggi studio storia», allora:

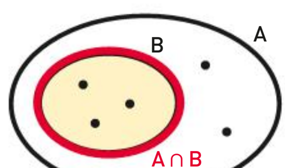
- $A \vee B$, che si legge «A o B», è «Oggi studio inglese **o** storia», proposizione vera se studio una sola delle due materie, ma anche se le studio entrambe;
- $A \wedge B$, che si legge «A e B», è «Oggi studio inglese **e** storia», vera solo se studio entrambe le materie.

Se $B \subset A$:

$A \cup B = A$



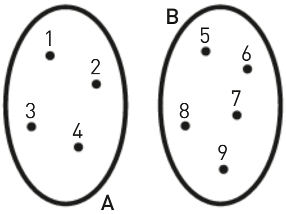
$A \cap B = B$



Inoltre:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A; \quad A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing; \quad \varnothing \cup \varnothing = \varnothing; \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing.$$

Se due insiemi non hanno elementi in comune, la loro intersezione è l'insieme vuoto e diciamo che gli insiemi sono **disgiunti**.



insiemi disgiunti: $A \cap B = \varnothing$

Valgono le seguenti proprietà.

Proprietà commutativa dell'unione:

$A \cup B = B \cup A$.

Proprietà associativa dell'unione:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Proprietà commutativa dell'intersezione:

$A \cap B = B \cap A$.

Proprietà associativa dell'intersezione:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

DIFFERENZA

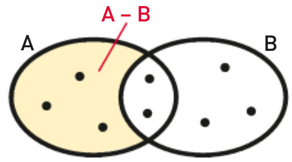
Esercizi a pagina 13

DEFINIZIONE

Dati gli insiemi A e B, la **differenza** $A - B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B.

$$\boldsymbol{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

ESEMPIO



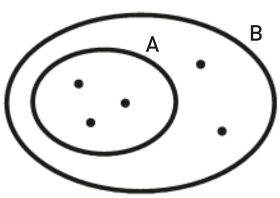
- I ristoranti A e B hanno questi menu a prezzo fisso:
  $A = \{\text{antipasto, primo, secondo}\}$, $B = \{\text{primo, secondo, dolce}\}$;
  $A - B = \{\text{antipasto}\}$, $B - A = \{\text{dolce}\}$.

A – B è quello che posso mangiare in *A* ma non in *B*.
B – A è quello che posso mangiare in *B* ma non in *A*.

Casi particolari

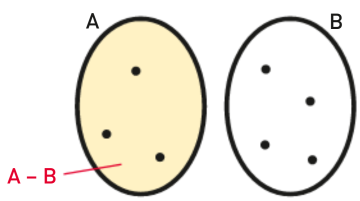
$A \subseteq B \quad \rightarrow \quad A - B = \varnothing$

non ci sono elementi di *A* che non appartengono a *B*



$A \cap B = \varnothing \quad \rightarrow \quad A - B = A$

tutti gli elementi di *A* non appartengono a *B*



COMPLEMENTARE DI UN INSIEME

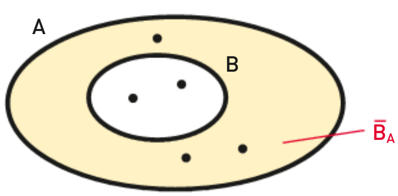
Esercizi a pagina 13

DEFINIZIONE

Dati gli insiemi A e B, con $B \subseteq A$, l'**insieme complementare** di B rispetto ad A è $A - B$. Lo indichiamo con $\overline{B}_A$.

Se $\boldsymbol{B \subseteq A}$, $\boldsymbol{\overline{B}_A = A - B}$.

ESEMPIO



ESEMPIO Dall'orto

Stai preparando un minestrone con prodotti dell'orto:

$O = \{$lattuga, carote, fagioli, zucchine, piselli$\}$.

Consideriamo il sottoinsieme delle verdure:

$V = \{$lattuga, carote, zucchine$\}$.

▸ **Qual è l'insieme $\overline{V}_O$?**

$V \subset O$ e $\overline{V}_O$ è il sottoinsieme dei legumi: $\{$fagioli, piselli$\}$.

Casi particolari

$\overline{A}_A = \varnothing$ perché $A - A = \varnothing$

$\overline{\varnothing}_A = A$ perché $A - \varnothing = A$

PRODOTTO CARTESIANO

Esercizi a pagina 15

DEFINIZIONE

Dati gli insiemi A e B, il **prodotto cartesiano** $A \times B$ è l'insieme delle coppie ordinate $(a; b)$, con a che appartiene all'insieme A e b che appartiene all'insieme B.

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}}$$

Rappresentiamo graficamente il prodotto cartesiano mediante un **diagramma cartesiano**.

Per costruirlo, disegniamo due semirette perpendicolari, una orizzontale e una verticale, con la stessa origine: su quella orizzontale indichiamo gli elementi del primo insieme, su quella verticale gli elementi del secondo. Dagli elementi del primo insieme tracciamo delle semirette verticali e da quelli del secondo delle semirette orizzontali: i punti di intersezione rappresentano le coppie del prodotto cartesiano.

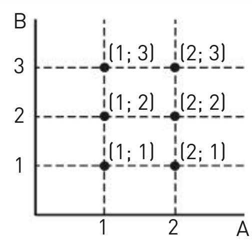
ESEMPIO

▸ **Tracciamo il diagramma cartesiano di $A \times B$, con $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.**

Ogni coppia del prodotto cartesiano

$$A \times B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$$

è rappresentata da un punto.

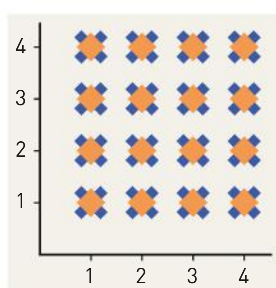


In un prodotto cartesiano le coppie sono *ordinate*, quindi coppie con gli stessi elementi ma in ordine diverso sono diverse.

ESEMPIO Tavoli a scacchiera

I tavoli di un ristorante sono disposti a scacchiera come indicato in figura. In questo modo ogni tavolo è identificato da una coppia di numeri.

La cameriera Elisa ricorda perfettamente i due numeri del tavolo che ha ordinato gli spaghetti alle vongole: 1 e 3.



▸ **Quando consegna la pietanza però i clienti protestano. Perché?**

L'errore di Elisa è stato quello di non dare importanza all'ordine dei due numeri che identificano il tavolo: il tavolo $(1; 3)$ è diverso dal tavolo $(3; 1)$ e gli spaghetti sono andati al tavolo sbagliato!

Quindi, in generale, $A \times B \neq B \times A$: il prodotto cartesiano *non* gode della proprietà commutativa.
Consideriamo un esempio in cui calcoliamo sia $A \times B$ sia $B \times A$.

- Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2\}$:

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2)\};$$

$$B \times A = \{(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}.$$

Le coppie di $A \times B$ sono diverse da quelle di $B \times A$.
Per esempio, $(b; 2) \in A \times B$ e $(2; b) \in B \times A$, ma $(b; 2) \neq (2; b)$. Quindi $A \times B$ e $B \times A$ sono insiemi diversi, pur avendo lo stesso numero di elementi.

Se A ha n elementi e B ha m elementi allora $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi.

INSIEME DELLE PARTI

Esercizi a pagina 17

DEFINIZIONE

L'**insieme delle parti** $\mathcal{P}(A)$ di un insieme A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

- Se $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(A) = \{A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \varnothing\}$.

PARTIZIONE DI UN INSIEME

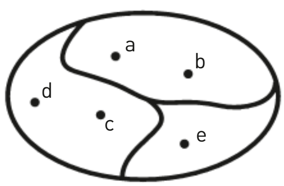
Esercizi a pagina 18

DEFINIZIONE

Una **partizione** dell'insieme A è un insieme di sottoinsiemi di A tale che:

- l'unione dei sottoinsiemi è A;
- i sottoinsiemi sono disgiunti tra loro;
- nessun sottoinsieme è vuoto.

ESEMPIO



Una partizione di $A = \{a, b, c, d, e\}$ è: $\{\{a, b\}, \{d, c\}, \{e\}\}$.

A **partition** of a set A is a set of non-empty subsets whose union is A and that pairwise have empty intersection.

Una partizione è utile per dividere un insieme in sottoinsiemi di elementi che hanno una stessa proprietà.

ESEMPIO Alberghi e partizioni

L'insieme A degli alberghi italiani può essere diviso mediante diverse partizioni. Per esempio, possiamo scriverne una in cui indichiamo, in modo sintetico, gli alberghi con una stella, due stelle…
Un'altra partizione si ottiene considerando il numero di camere.

Stelle	{{una stella}, {due stelle}, {tre stelle}, {quattro stelle}, {quattro stelle superior}, {cinque stelle}, {cinque stelle lusso}}
Numero di camere	{{fino a 20 camere}, {da 21 a 60 camere}, {da 61 a 100 camere}, {più di 100 camere}}

▸ **Ti viene in mente qualche altro esempio?**

ESERCIZI

1. CHE COS'È UN INSIEME

INSIEMI E LORO RAPPRESENTAZIONI Teoria a pagina 2

«tale che»

$V = \{x \mid x \text{ è una vocale}\}$

proprietà caratteristica

insieme elemento

$V = \{a, e, i, o, u\}$

elencazione

a ∈ V, g ∉ V

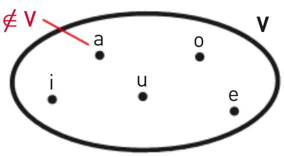


diagramma di Venn

1 VERO O FALSO? Sono un insieme:

a. le potenze di 2 molto grandi. V F

b. gli stabilimenti balneari aperti tutto l'anno. V F

c. gli alimenti contenenti più di 125 cal per 100 g. V F

d. i multipli di 5 minori di 29. V F

2 FAI UN ESEMPIO Fai tre esempi di insiemi e tre di raggruppamenti che non sono insiemi. Motiva le tue scelte.

3 VERO O FALSO? Sono un insieme:

a. le manifestazioni di prestigio con molti invitati. V F

b. i bar vicini al mare. V F

c. i libri formati da 270 pagine. V F

d. i campeggi costosi. V F

4 CACCIA ALL'ERRORE Indica le scritture formalmente non corrette.

$\{-1\} \in \{-1, 1, 2\}$; $0 \in \{0\}$; $14 \notin \{13\}$;

$\{7\} \in \mathbb{N}$; $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$; $0 \in \varnothing$.

5 CUCINA **Fusilli o farfalle?** Considera:

A = {tipi di pasta il cui nome inizia con la lettera «f»};
B = {lettere della parola «fusilli»}.

Scrivi accanto a ogni elemento l'insieme di cui fa parte, inserendo negli spazi una delle seguenti alternative: A, B, né A né B.

a. farfalle *A*
b. f ______
c. t ______
d. fusilli ______
e. i ______
f. spaghetti ______

Rappresentazioni di un insieme

Rappresentazione per elencazione

Rappresenta per elencazione i seguenti insiemi.

6 **a.** I divisori di 100.
b. Gli articoli determinativi della lingua italiana.
c. I multipli di 4 maggiori di 6 e minori di 20.

7 **a.** Le lettere doppie in «crème caramel».
b. I numeri primi che sono divisori di 60.
c. Le cifre del numero 120 102.

Rappresentazione con proprietà caratteristica

Rappresenta mediante la proprietà caratteristica i seguenti insiemi.

8 a. $A = \{$pollice, indice, medio, anulare, mignolo$\}$;
b. $B = \{$quadri, fiori, picche, cuori$\}$;
c. $C = \{$Alpi, Appennini$\}$;
d. $D = \{$incisivi, canini, premolari, molari$\}$;
e. $E = \{$do, re, si, fa, sol, mi, la$\}$.

9 a. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
b. $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c. $C = \{9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;
d. $D = \{11, 12, 13, 14, 15, \dots, 100\}$.

10 ESEMPIO DIGITALE
a. $A = \left\{\dots, -\frac{7}{9}, -\frac{6}{8}, -\frac{5}{7}, -\frac{4}{6}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{3}\right\}$;
b. $B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, \dots\}$.

Rappresentazione con diagramma di Venn

11 IN FORMA GRAFICA Rappresenta con diagrammi di Venn gli insiemi:
$A = \{x \mid x$ è un divisore primo di 360$\}$;
$B = \{x \mid x$ è una cifra del numero 2021$\}$;
$C = \{x \mid x$ è un naturale pari minore di 11$\}$;
$D = \{x \mid x$ è una lettera della parola «farfalla»$\}$.

12 ANIMAZIONE Rappresenta per elencazione e mediante diagrammi di Venn gli insiemi:
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 10\}$;
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = -4\}$;
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari e $x < 2\}$;
$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è dispari e $1 \leq x \leq 5\}$.
Indica se B, C, D, E sono sottoinsiemi di A.

Rappresenta i seguenti insiemi in tutti i modi possibili.

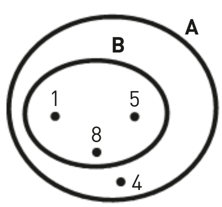
13 L'insieme dei multipli di 8 minori di 46.

14 L'insieme delle lettere della parola «divertente».

15 L'insieme dei divisori di 20.

SOTTOINSIEMI

Teoria a pagina 3



B è un sottoinsieme di A:
$B \subseteq A$
1, 5, 8 ∈ A

A non è un sottoinsieme di B:
$A \not\subseteq B$
4 ∈ A e 4 ∉ B

B è un sottoinsieme proprio di A:
$B \subset A$
B ⊆ A e 4 ∈ A ma 4 ∉ B

sottoinsiemi impropri:
$A \subseteq A$ — insieme qualsiasi
$\varnothing \subseteq A$ — sottoinsieme di ogni insieme

16 IN FORMA GRAFICA Dai una possibile rappresentazione con diagrammi di Venn degli insiemi A, B, C, D, sapendo che $A \subset B \subset D$ e $C \subset D$.

17 VERO O FALSO? Se $A = \{2, 3, 5, 7\}$:
a. $\{2, 3, 5\} \subseteq A$. V F
b. $\{7\} \subset A$. V F
c. $\{7\} \in A$. V F
d. $\varnothing \subseteq A$. V F
e. $\{235\} \subset A$. V F
f. $2 \subset A$. V F

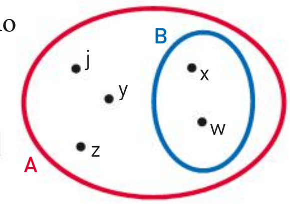
18 FAI UN ESEMPIO Scrivi mediante la proprietà caratteristica tre sottoinsiemi dei numeri naturali A, B e C tali che $C \subset B \subset A$.

Stabilisci se gli insiemi A, B e C sono sottoinsiemi dell'insieme H e, in caso affermativo, specifica se sono propri o impropri.

19 $A = \{-1, 0, 2, 3\}$; $C = \varnothing$;
$B = \{2, 3\}$; $H = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

20 CUCINA
$A = \{x \mid x$ è un calice da vino bianco$\}$;
$B = \{x \mid x$ è una forchetta da pesce a 8 punte$\}$;
$C = \{x \mid x$ è una padella$\}$;
$H = \{x \mid x$ è un elemento dell'attrezzatura di un ristorante$\}$.

21 COMPLETA osservando il diagramma di Venn.



a. $j \in$ [A] d. ____ $\notin B$

b. $y \notin$ ____ e. $w, z \in$ ____

c. ____ $\in A$ f. ____ $\in B$

22 VIDEO **L'albergo di Hilbert** Per gli insiemi infiniti valgono proprietà che possono sembrare paradossali, perché diverse da quelle che siamo abituati a osservare per gli insiemi finiti.
Guarda il video che ti proponiamo e riassumi il suo contenuto.

23 SALA E VENDITA **Acqua, vino e altro** Completa con il simbolo corretto tra $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$. Considera A l'insieme delle bevande e B l'insieme dei vini.

a. Brunello [$\in$] A; olio [$\notin$] A.
b. {Merlot} ____ B; Barolo ____ B.
c. Chianti ____ B; {Pinot, Barolo} ____ B.
d. {acqua, Nero d'Avola} ____ A; {maionese, tè} ____ A.
e. {camomilla, Brunello} ____ B; latte ____ B.
f. {birra, Vermentino} ____ B; {succo di ananas} ____ A.
g. {aranciata} ____ B; limonata ____ B.

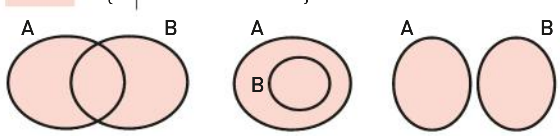
2. OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

UNIONE E INTERSEZIONE

Teoria a pagina 4

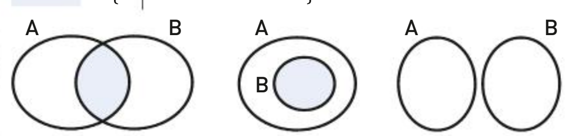
unione

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$



intersezione

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$



24 COMPLETA le tabelle seguenti considerando come insiemi $P = \{x \mid x \text{ è divisore di } 9\}$ e $Q = \{2, 9\}$.

$\cap$	P	Q	$\varnothing$
P		{9}	
Q			
$\varnothing$			

$\cup$	P	Q	$\varnothing$
P			
Q			
$\varnothing$			

Determina l'unione e l'intersezione di ogni coppia di insiemi, rappresentandole per elencazione e con diagrammi di Venn.

25 ESEMPIO DIGITALE $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è dispari e } x < 10\}$; $B = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq n \leq 5\}$.

26 a. $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «Marte»$\}$; $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola «cartellina»$\}$.
b. $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «varia»$\}$; $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola «arriva»$\}$.

27 a. $A = \{x \mid x$ è maggiorenne$\}$; $B = \{x \mid x$ ha meno di 26 anni$\}$.
b. $A = \{x \mid x$ è un colore della bandiera inglese$\}$; $B = \{x \mid x$ è un colore della bandiera italiana$\}$.

28 a. $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «alcol»$\}$, $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola «cola»$\}$.
b. $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «trattoria»$\}$, $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola «locanda»$\}$.

ESEMPIO Alberghi e insiemi

Consideriamo gli insiemi:

$A = \{x \mid x$ è un albergo con vista mare$\}$,

$B = \{x \mid x$ è un albergo con colazione continentale$\}$.

▸ **Qual è la rappresentazione mediante proprietà caratteristica di $A \cup B$? E quella di $A \cap B$?**

$A \cup B = \{x \mid x$ è un albergo con vista mare **o** con colazione continentale$\}$,

$A \cap B = \{x \mid x$ è un albergo con vista mare **e** con colazione continentale$\}$.

Dati i seguenti insiemi A e B, scrivi $A \cup B$ e $A \cap B$ mediante proprietà caratteristica.

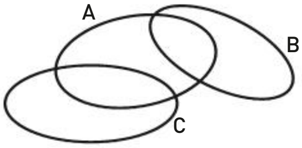
29 SALA E VENDITA
$A = \{x \mid x$ è un cocktail con sciroppo di lampone$\}$;
$B = \{x \mid x$ è un cocktail con succo di ananas$\}$.

30 CUCINA $A = \{x \mid x$ è una tartina al salmone$\}$;
$B = \{x \mid x$ è una tartina con sottaceti$\}$.

31 ACCOGLIENZA TURISTICA
$A = \{x \mid x$ è una pensione al mare$\}$;
$B = \{x \mid x$ è una pensione con parcheggio$\}$.

32 FAI UN ESEMPIO Fai due esempi di insiemi A e B tali che la loro intersezione sia uguale all'insieme A e la loro unione sia uguale a B. Che relazione c'è tra A e B?

Dopo aver ricopiato più volte la figura, colora i seguenti insiemi.



33 $A \cup C$; $(A \cup C) \cap B$; $(A \cap B) \cup C$.

34 $A \cup (A \cap B)$; $(A \cap C) \cup B$; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è pari, $x \leq 10\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è multiplo di 3, $x \leq 12\}$, determina i seguenti insiemi.

35 $(A \cup B) \cap C$ **36** $A \cup (B \cap C)$ **37** $A \cap (B \cup C)$ **38** $(A \cup B) \cup C$

Dati gli insiemi $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «brie»$\}$, $B = \{x \mid x$ è una lettera della parola «gorgonzola»$\}$, $C = \{x \mid x$ è una lettera della parola «fontina»$\}$, determina i seguenti insiemi.

39 $(A \cap B) \cup (B \cap C)$ **40** $(A \cup B) \cap C$ **41** $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ **42** $(A \cap C) \cup B$

43 VERO O FALSO? Sia A un insieme generico.

a. $A \cup A = \varnothing$ V F
b. $A \cap A = A$ V F
c. $A \cap \varnothing = \varnothing$ V F
d. $A \cup \varnothing = \varnothing$ V F

44 VERO O FALSO? Siano A e B due insiemi generici tali che $A \subset B$.

a. $A \cup B = B$ V F
b. $A \cap B = B$ V F
c. $A \cap (A \cup B) = A$ V F
d. $B \cup (A \cap B) = \varnothing$ V F

45 COMPLETA le seguenti espressioni con A e B insiemi generici.

a. $A \cup (A \cap A) = \boxed{A}$
b. $A \cap (A \cup B) = \boxed{}$
c. $\varnothing \cup (A \cap A) = \boxed{}$
d. $(A \cap B) \cup (B \cup \varnothing) = \boxed{}$

46 COMPLETA le seguenti espressioni con A e B insiemi generici tali che $A \subset B$.

a. $A \cup (A \cap B) = \boxed{}$
b. $[(B \cap \varnothing) \cap (A \cup B)] \cap B = \boxed{}$
c. $[(A \cap B) \cap (B \cup \varnothing)] \cup B = \boxed{}$

Dato $A \subset B$, con A e B insiemi generici, calcola il risultato delle seguenti espressioni.

47 $(A \cap B) \cap B$; $(A \cap B) \cap A$.

48 $[(A \cap \varnothing) \cup (B \cup \varnothing)] \cap (B - A)$.

Sia $A \cap B = C$, con A, B insiemi generici. Calcola il risultato delle seguenti espressioni.

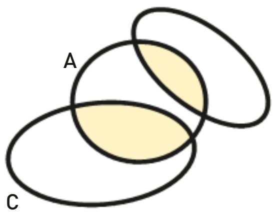
49 $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

50 $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.

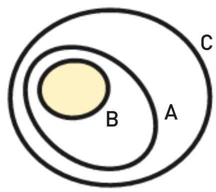
51 $[(B \cap C) \cup \varnothing] \cap (C \cap A)$

52 $[(B \cap C) \cup (A \cap \varnothing)] \cup [(B \cap \varnothing) \cup (A \cap C)]$

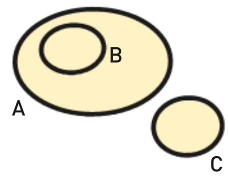
53 IN FORMA GRAFICA Per ognuno dei seguenti diagrammi di Venn scrivi, utilizzando i simboli di unione e intersezione, un'espressione che rappresenti la parte colorata.



a



b



c

54 ANIMAZIONE Verifica mediante i diagrammi di Venn che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

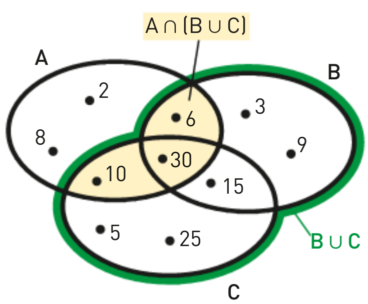
ESEMPIO

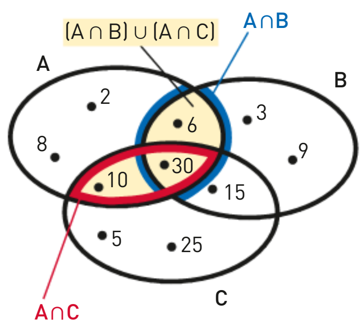
▸ **Consideriamo $A = \{2, 6, 8, 10, 30\}$, $B = \{3, 6, 9, 15, 30\}$, $C = \{5, 10, 15, 25, 30\}$.**
Verifichiamo che $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Primo membro
$A = \{2, 6, 8, 10, 30\}$,
$B \cup C = \{3, 5, 6, 9, 10, 15, 25, 30\}$.
Quindi:
$A \cap (B \cup C) = \{6, 10, 30\}$.

Secondo membro
$A \cap B = \{6, 30\}$,
$A \cap C = \{10, 30\}$.
Quindi:
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{6, 10, 30\}$.

Abbiamo ottenuto lo stesso risultato, quindi la proprietà è verificata.
Vediamolo anche con i diagrammi di Venn.





Utilizzando gli insiemi $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 6, 9, 12\}$, verifica le seguenti proprietà scrivendo gli insiemi per elencazione e rappresentandoli con i diagrammi di Venn.

55 **a.** Commutativa dell'unione: utilizza A e C. **b.** Commutativa dell'intersezione: utilizza B e C.

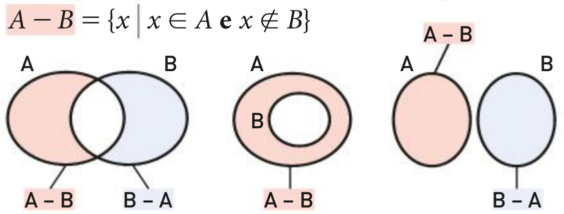
56 **a.** Associativa dell'unione. **b.** Associativa dell'intersezione.

57 **a.** Distributiva dell'unione rispetto all'intersezione. **b.** Distributiva dell'intersezione rispetto all'unione.

58 IN FORMA GRAFICA Ripeti gli esercizi precedenti considerando tre insiemi generici A, B, C e utilizzando soltanto i diagrammi di Venn.

DIFFERENZA Teoria a pagina 5

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$



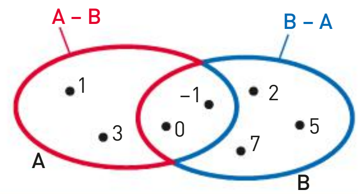
ESEMPIO

▸ **Dati gli insiemi $A = \{-1, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 2, 5, 7\}$, determiniamo $A - B$ e $B - A$.**

$A - B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B:

$A - B = \{1, 3\}$.

In modo analogo: $B - A = \{2, 5, 7\}$.



Determina $A - B$ e $B - A$ con i seguenti insiemi.

59 $A = \{-2, -1, 4, 5\}$, $B = \{-2, 4\}$.

60 $A = \{1, 8\}$, $B = \{0, 3\}$.

61 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 10\}$,
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un divisore di } 20\}$.

ESEMPIO Quali frullati?

Consideriamo gli insiemi:
$A = \{x \mid x$ è un frullato contenente agrumi$\}$,
$B = \{x \mid x$ è un frullato contenente arancia$\}$.

▸ **Qual è la rappresentazione mediante proprietà caratteristica di $A - B$? E quella di $B - A$?**

$A - B = \{x \mid x$ è un frullato contenente agrumi ma non arancia$\}$.

$B - A = \{x \mid x$ è un frullato contenente arancia ma non agrumi$\} = \varnothing$, dal momento che l'arancia è un agrume.

Dati i seguenti insiemi A e B, scrivi $A - B$ e $B - A$ mediante proprietà caratteristica.

62 SALA E VENDITA $A = \{x \mid x$ è un coltello d'argento$\}$, $B = \{x \mid x$ è un coltello da pesce$\}$.

63 CUCINA $A = \{x \mid x$ è un primo contenente pomodoro$\}$, $B = \{x \mid x$ è un primo contenente panna$\}$.

64 CHI HA RAGIONE? Antonio: «Per favore, prestami il bianchetto: ho scritto $A - B$ anziché $B - A$…». Gloria: «Che pignolo che sei! Fa lo stesso, come per unione e intersezione!». Ad Antonio il bianchetto serve?

COMPLEMENTARE DI UN INSIEME Teoria a pagina 5

Per ogni insieme A, determina il complementare rispetto all'insieme U.

65 $U = \{x \mid x$ è un abitante dell'Italia$\}$; $A = \{x \mid x$ è un abitante della Puglia$\}$.

66 $U = \{x \mid x$ è l'insieme dei poligoni$\}$; $A = \{x \mid x$ è l'insieme dei quadrilateri$\}$.

67 $U = \{x \mid x$ è un ortaggio$\}$; $A = \{x \mid x$ è un legume$\}$.

Se $B \subseteq A$, $\overline{B}_A = A - B$: **complementare** di B rispetto ad A.

COMPITO DI REALTÀ Insiemi di dolci

IN MEZZ'ORA

Consideriamo la seguente lista di 7 dessert con i rispettivi ingredienti.

Torta margherita: farina, fecola, burro, zucchero, uova, limone, sale.
Muffin al cioccolato: farina, burro, zucchero, uova, latte, lievito, cioccolato, cacao amaro.
Tiramisù: mascarpone, biscotti secchi, caffè, zucchero, cioccolato, uova, cacao amaro.
Profiteroles: farina, burro, uova, latte, panna, cioccolato, zucchero.
Cookies al cioccolato: zucchero, burro, uova, farina, cioccolato, vaniglia, sale.
Castagnaccio: farina di castagne, latte, zucchero, pinoli, rosmarino, olio, sale.
Cantuccini: farina, zucchero a velo, lievito, uova, mandorle, pinoli, burro.

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi della lista dei dessert:

- $A = \{x \mid x \text{ è un dessert con cioccolato}\}$,
- $B = \{x \mid x \text{ è un dessert con pinoli}\}$.

▸ **Quali sono gli elementi degli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$?**

- $A \cup B =$ {muffin al cioccolato, tiramisù, profiteroles, cookies al cioccolato, castagnaccio, cantuccini}.
  Questi sono i dessert della lista che contengono cioccolato oppure pinoli.
- $A \cap B = \varnothing$ perché nella lista non ci sono dessert che contengono sia cioccolato sia pinoli.
- $A - B =$ {muffin al cioccolato, tiramisù, profiteroles, cookies al cioccolato}.
  Questi sono i dessert della lista che contengono cioccolato ma non pinoli. Siccome $A \cap B = \varnothing$, $A - B = A$.
- $B - A =$ {castagnaccio, cantuccini}.
  Questi sono i dessert della lista che contengono pinoli ma non cioccolato. Siccome $A \cap B = \varnothing$, $B - A = B$.

Ora prova tu!

Considera i seguenti sottoinsiemi della lista precedente di sette dessert:

- $C = \{x \mid x \text{ è un dessert con uova}\}$;
- $D = \{x \mid x \text{ è un dessert con burro}\}$.

Quali sono gli insiemi $C \cup D$, $C \cap D$, $C - D$, $D - C$? Descrivili per elencazione e mediante proprietà caratteristica.
Conosci altri dessert che hanno la proprietà caratteristica degli insiemi che hai costruito?

PRODOTTO CARTESIANO

Teoria a pagina 6

$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{1, 2\}$

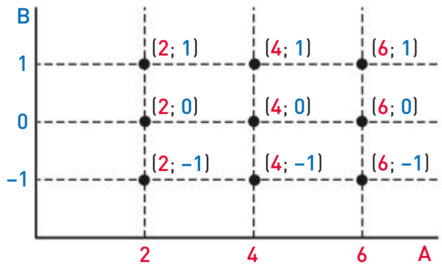
$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (b; 1), (b; 2), (c; 1), (c; 2)\}$

ESEMPIO

▶ **Dati gli insiemi $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{-1, 0, 1\}$, rappresentiamo il prodotto cartesiano $A \times B$ per elencazione e mediante un diagramma cartesiano.**

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate con il primo elemento che appartiene ad A e il secondo che appartiene a B.

$$A \times B \overset{(a;\, b) \mid a \in A,\, b \in B}{=} \{(2; -1), (2; 0), (2; 1), (4; -1), (4; 0), (4; 1), (6; -1), (6; 0), (6; 1)\}.$$



Per ogni coppia di insiemi A e B, rappresenta $A \times B$ e $B \times A$ per elencazione e con un diagramma cartesiano.

68 $A = \{0, 1\}$; $B = \{x, y\}$.

69 $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$; $B = \{1\}$.

70 $A = \{x\}$; $B = \{1, 2\}$.

71 $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «casa»$\}$;
$B = \{x \mid x$ è una vocale della parola «villa»$\}$.

Rappresenta per elencazione e con un diagramma cartesiano l'insieme $A \times A$.

72 $A = \{0\}$

73 $A = \{a, 1\}$

74 $A = \varnothing$

75 $A = \{a, e, i\}$

Rappresenta per elencazione e con un diagramma cartesiano $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$.

76 $A = \{0, 1\}$; $B = \{x, y, z\}$.

77 $A = \{-1, 1\}$; $B = \{a, b, c\}$.

78 CUCINA **Condimenti regionali** Quali e quanti sono i primi piatti che potresti ottenere con spaghetti, penne rigate, fusilli e rigatoni come tipi di pasta e pesto, amatriciana e carbonara come condimenti?
Costruisci il diagramma cartesiano.
Alcuni dei piatti che hai ottenuto sono tipici di certe regioni d'Italia. Quali? [12]

79 SALA E VENDITA **Cocktail** Considera i tre elementi che costituiscono un cocktail: base, coadiuvante e correttore. Quanti e quali cocktail potresti ottenere usando gin, rum o cognac come base, vermouth dry o vermouth rosso come coadiuvante e succo d'arancia o sciroppo di zucchero come correttore? [12]

80 SALA E VENDITA **Stessi menu?** Il menu turistico di un ristorante permette di ordinare un primo e un dolce a scelta tra i seguenti.

1. Risotto agli asparagi
2. Linguine al pesto
3. Tagliatelle ai funghi

1. Crostata di frutta
2. Panna cotta
3. Tiramisù
4. Millefoglie

Andrea effettua l'ordine (3; 2), Asia il (2; 3).

a. Hanno ordinato la stessa combinazione di piatti? Motiva la risposta.

b. Chiama P l'insieme dei primi e D quello dei dolci. Rappresenta $P \times D$ con un diagramma cartesiano.

81 INVALSI 2014 Luisa non ricorda bene la combinazione del lucchetto della sua bicicletta. La combinazione si ottiene girando quattro rotelline, ognuna delle quali riporta tutte le cifre da 0 a 9. Luisa non ricorda per nulla la seconda cifra della combinazione ma sa che:

- la prima cifra è 6;
- la terza cifra è 3 o 4;
- l'ultima cifra è 1.

Quante combinazioni al massimo dovrà provare Luisa per riuscire ad aprire il lucchetto della sua bicicletta?

A 2 B 3 C 10 D 20

Considera $A = \{0, 3\}$, $B = \{-2, 0, 3\}$, $C = \{x, y\}$ e determina i seguenti insiemi.

82 $(A \times B) \cap (B \times A)$; $A \times (A \cap B)$.

83 $(A \times B) \times C$; $(A \times C) \cap (A \times B)$.

84 Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2\}$, verifica se:

a. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

b. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Dato l'insieme $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e gli insiemi $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, determina e rappresenta con i diagrammi di Venn i seguenti insiemi, dove i complementari di A e B sono rispetto a U.

85 $\overline{B}$; $\overline{A} - B$; $A \cap \overline{B}$; $\overline{A} \cup \overline{B}$.

86 $(A - B) \times \overline{A}$; $A \cup \overline{B}$; $(A \cap B) \cup \overline{A}$.

87 $\overline{A} - \overline{B}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup B} \cap \overline{A}$.

88 $\overline{A} \times \overline{B}$; $(A \cup B) \cap \overline{A}$; $\overline{B - A}$.

Nel foglietto ci sono tre insiemi. Rappresentali con un diagramma di Venn e determina i seguenti insiemi.

$A = \{x \mid x = n^2, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq n < 5\}$

$B = \{x \mid x = 3n, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < n \leq 5\}$

$C = \{x \mid x = 2n, \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq n \leq 6\}$

89 $B \cap A$, $A \cap C$, $(B \cup C) \cap A$, $(C \cap A) \cup A$, $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$.

90 $(B \cap C) \times (A \cap B)$, $(A \cap B) \times (A \cap C)$, $(C \cap A) \times (C \cap B)$.

91 $A - B$, $B - A$, $(B - C) - A$, $C - (C - A)$, $B - (C - B)$.

92 Dati gli insiemi $A = \{x \mid x$ è una lettera di «cane»$\}$, $B = \{$a, b, c$\}$ e $C = \{x \mid x$ è una lettera di «Ada»$\}$, rappresenta per elencazione:

a. $(A \times C) \cap (B \times C)$;

b. $(B \times C) - (A \times B)$;

c. $(A \times B) \cup (B \times C)$.

93 Dati gli insiemi $A = \{0, 5, 10\}$, $B = \{5\}$ e $C = \{5, 10, 15\}$, rappresenta per elencazione:

a. $(A - B) \times (C - B) \cap (A \times B)$;

b. $A \times (B \cap C)$;

c. $(A \times B) - (A \times C)$.

INSIEME DELLE PARTI

Teoria a pagina 7

94 TEST Quale dei seguenti *non* può essere l'insieme delle parti di un insieme?

A $\{\{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}$ C $\{\{a\}, \varnothing\}$

B $\{\{+, \bigstar\}, \{\bigstar\}, \varnothing, \{+\}\}$ D $\{\varnothing\}$

Determina l'insieme delle parti dei seguenti insiemi e indica il numero dei suoi elementi.

95 $A = \{9, 12\}$; $B = \{\alpha, \beta, \pi\}$.

96 $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «sette»$\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$.

97 $A = \{x \mid x$ è un divisore dispari di $36\}$; $B = \varnothing$.

98 CUCINA **Crostata alla frutta** Considera l'insieme $B = \{$ciliegie, fragole, lamponi, more$\}$.

a. Quante e quali crostate alla frutta puoi ottenere usando solo frutti dell'insieme B? Per rispondere scrivi l'insieme delle parti di B.

b. Che cosa rappresenta l'insieme vuoto $\varnothing$ che è sottoinsieme di B?

[a) 16]

COMPITO DI REALTÀ Insalate a volontà

IN MEZZ'ORA

Per preparare un'insalata mescoliamo tra loro degli ingredienti, ottenendo piatti diversi. Supponiamo di avere una ciotola con all'interno della lattuga. Possiamo anche aggiungere della mozzarella e dei pomodorini.

▸ **Quali e quanti sono i tipi di insalata con lattuga che possiamo ottenere?**

Le varietà di insalate che possiamo ottenere sono 4:
1. insalata senza aggiunte: solo lattuga;
2. insalata con lattuga e pomodorini;
3. insalata con lattuga e mozzarella;
4. insalata con lattuga, mozzarella e pomodorini.



Costruiamo un modello che risolve il problema con gli insiemi. Se con p indichiamo i pomodorini e con m la mozzarella, $A_2 = \{p, m\}$ è l'insieme degli ingredienti aggiungibili alla lattuga e $\mathcal{P}(A_2) = \{\varnothing, \{p\}, \{m\}, A_2\}$ è l'insieme delle parti che considera le quattro possibilità. In particolare, l'insieme vuoto $\varnothing$ indica l'insalata senza aggiunte, cioè solo con la lattuga.

E se nella dispensa avessimo anche delle olive nere?

Se con o indichiamo le olive, l'insieme degli ingredienti che possiamo aggiungere alla lattuga è $A_3 = \{p, m, o\}$ e l'insieme delle parti è

$$\mathcal{P}(A_3) = \left\{\varnothing, \{p\}, \{m\}, \{o\}, \{p, o\}, \{p, m\}, \{m, o\}, A_3\right\},$$

che ha 8 elementi: se abbiamo 3 ingredienti aggiuntivi, possiamo ottenere 8 insalate.

Ingredienti aggiuntivi	Insalate
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
...	...

Generalizzando il procedimento, si ottiene la tabella a fianco. Poiché si può dimostrare che se un insieme A ha n elementi, allora $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi, con n ingredienti aggiuntivi abbiamo 2^n insalate.

Una curiosità!

Ognuno di noi riesce a pensare a 10 ingredienti possibili da aggiungere all'ingrediente base, cioè la lattuga. Quante sarebbero le insalate che potremmo preparare? Il numero di insalate miste che potremmo proporre è $2^{10} = 1024$!

Ora prova tu!

L'insalata mista è un alimento internazionale, presente nelle cucine tradizionali di molti Paesi.
Fai una ricerca sulle insalate tipiche di alcuni Paesi del mondo e trascrivine gli ingredienti. Pensando, come negli esempi precedenti, di considerare un ingrediente base, quante insalate miste diverse puoi preparare con gli ingredienti che hai annotato?

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Teoria a pagina 7

FAI UN ESEMPIO **Determina almeno una partizione dei seguenti insiemi.**

99 L'insieme dei tuoi compagni di classe.

100 L'insieme dei divisori di 40.

101 Trova tutte le possibili partizioni dell'insieme $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «aria»$\}$.

102 Considera l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$. Scegli fra i seguenti sottoinsiemi di A quelli che costituiscono una sua partizione: $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{0, 2\}$, $D = \{0, 10\}$, $E = \{0, 2, 4\}$, $F = \{6, 8\}$, $G = \{0, 1\}$, $H = \{9, 10\}$.

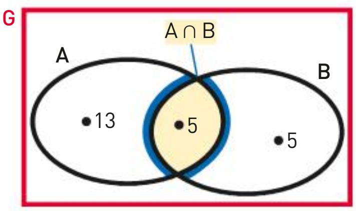
PROBLEMI CON GLI INSIEMI

ESEMPIO Guide multilingue

Tra le 35 guide turistiche che lavorano per un'agenzia italiana, 18 parlano inglese, 10 francese e 5 entrambe le lingue straniere.

▸ **Quante sono le guide che non parlano né inglese né francese?**

Disegniamo una partizione dell'insieme delle guide turistiche con i diagrammi di Venn e ricaviamo il numero di elementi di ciascun insieme della partizione.
Chiamiamo G l'insieme di tutte le guide, A quello delle guide che parlano inglese e B quello delle guide che parlano francese.



G ha 35 elementi, A ha 18 elementi, B ha 10 elementi e $A \cap B$ ha 5 elementi.
Dai dati osserviamo che se $A \cap B$ ha 5 elementi, allora:

- l'insieme $A - (A \cap B)$ ha $18 - 5 = 13$ elementi;
- l'insieme $B - (A \cap B)$ ha $10 - 5 = 5$ elementi.

L'insieme $A \cup B$ ha $13 + 5 + 5 = 23$ elementi.
Le guide che non parlano né inglese né francese appartengono all'insieme $G - (A \cup B)$, che ha $35 - 23 = 12$ elementi.

103 **ANIMAZIONE** Nella tabella abbiamo indicato quanti studenti, in una classe di 23, leggono gialli, fumetti e romanzi.

a. Quanti studenti leggono fumetti o gialli?

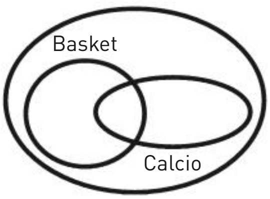
b. Quanti gialli o romanzi ma non fumetti?

c. Quanti un solo genere?

gialli, fumetti e romanzi	1
fumetti	16
romanzi e gialli	3
fumetti e gialli	5
romanzi	8
gialli	10
fumetti e romanzi	4

104 INTORNO A NOI In una classe di 24 studenti, 10 praticano il nuoto e 8 la pallacanestro. Sapendo che 4 studenti praticano sia il nuoto sia la pallacanestro, quanti studenti nella classe non praticano nessuno dei due sport? Quanti praticano solamente la pallacanestro? [10; 4]

105 INVALSI 2014 Su 100 alunni di una scuola 82 alunni si interessano di calcio, 26 si interessano di basket, 10 non si interessano né di calcio, né di basket.
Scrivi nella opportuna zona del seguente diagramma il numero di studenti che si interessano sia di calcio sia di basket.



106 CUCINA **Uno chef particolare** Uno chef un po' bizzarro è famoso perché usa soltanto 25 ingredienti diversi nella sua cucina: 15 per preparare i primi, 9 per i secondi, 5 esclusivamente per preparare i dolci. Quanti sono gli ingredienti che usa per preparare sia i primi sia i secondi? [4]

(*Suggerimento*. Disegna gli insiemi e le loro intersezioni.)

107 ACCOGLIENZA TURISTICA **Vacanza in apnea** I 40 soci di un'associazione di subacquei vogliono organizzare una vacanza. È loro intenzione soggiornare per una parte del periodo in una località e poi, eventualmente, continuare in un'altra.
L'agenzia viaggi propone tre alternative, Amalfi, Elba, Lipari, e sonda l'opinione dei soci. 3 soci disapprovano tutte le proposte; 6 considerano valide tutte e tre le alternative; 7 preferiscono solo Amalfi; 8 solo l'Elba; 4 solo Amalfi e Lipari; 3 solo Amalfi ed Elba; 4 solo Elba e Lipari. Quanti preferiscono solo Lipari? Quali sono state le due mete prescelte? [5; Amalfi ed Elba]

108 INTORNO A NOI Nella classe 1ª B ci sono 18 ragazze e 10 studenti che portano gli occhiali. Sapendo che i ragazzi che non portano gli occhiali sono 7 e le ragazze che hanno gli occhiali sono 5, quanti sono gli alunni della classe? [30]

109 INTORNO A NOI In una piscina, nel mese di settembre, ci sono state 120 nuove persone iscritte. Si sa che 56 persone si sono iscritte solo al corso di nuoto, mentre 37 persone si sono iscritte sia al corso di nuoto sia al corso di acquagym. Quante persone si sono iscritte solo al corso di acquagym? [27]

110 ESEMPIO DIGITALE **Cosa fai nel tempo libero?** A 30 studenti di una classe viene sottoposto un questionario in cui si chiede di indicare una o più attività eventualmente svolte nel tempo libero, barrando le caselle di una lista con tre opzioni:

☐ leggo libri;
☐ ascolto musica;
☐ guardo la televisione.

Si sa che:

- 8 studenti non hanno dato alcuna risposta;
- il numero di quelli che leggono è lo stesso di quelli che guardano la televisione e di quelli che ascoltano musica;
- solo 4 studenti svolgono tutte e tre le attività;
- 5 studenti leggono e ascoltano musica;
- 6 studenti ascoltano musica e guardano la televisione;
- 7 studenti leggono e guardano la televisione.

Quanti sono gli studenti che hanno dichiarato di impiegare il tempo libero esclusivamente nella lettura? Qual è il numero totale di caselle barrate del questionario nel complesso?

111 CUCINA **Buongiorno!** Un'indagine commerciale ha fornito i risultati seguenti, relativi alle abitudini a colazione di un campione di 100 consumatori. Quanti consumatori del campione mangiano solo biscotti? Quanti non mangiano né biscotti né cereali? [42; 22]

15: sia biscotti sia cereali
78: cereali o biscotti
21: solo cereali

112 CUCINA **Che pizza vuoi?** Un pizzaiolo fa un'indagine tra 350 clienti per stabilire quali pizze piacciono di più tra margherita, verdure e marinara. Ottiene i risultati indicati sotto.

Sapendo che tutti i clienti hanno espresso almeno una preferenza, calcola quante persone hanno dato la loro preferenza per solo margherita e marinara. Quale pizza ha raggiunto il maggior numero di preferenze? [126; marinara]

113 ACCOGLIENZA TURISTICA **Camera con vista** Un albergo di Roma ha 26 camere con vasca idromassaggio, 18 camere con vista Colosseo, 8 camere che offrono entrambi i servizi e 4 camere prive di entrambi. Quante camere ha l'albergo? [40]

114 INTORNO A NOI **Invitati al diciottesimo** Alla festa per i 18 anni delle gemelle Sara e Alice partecipano 65 amici: 38 sono amici di Sara, 40 di Alice.
Quanti sono gli amici di entrambe? Rappresenta graficamente la situazione con i diagrammi di Venn.

[13]

115 INVALSI 2005 Ad un club sportivo sono iscritti 55 soci. 50 giocano a tennis, 20 vanno a cavallo. Sapendo che ogni iscritto pratica almeno uno dei due sport, quanti sono gli iscritti che vanno a cavallo e giocano a tennis?

A 5
B 15
C 30
D 35

116 Un vivaio ha in esposizione vari tipi di piante. 17 di queste sono coltivate in vaso, hanno foglia larga ma non infiorescenze; 15 sono coltivate in vaso, hanno infiorescenze ma foglie non larghe; 5 hanno foglie larghe e infiorescenze ma non sono coltivate in vaso. Sapendo che, tra tutte le piante esposte, 45 hanno almeno due delle caratteristiche citate (foglia larga, infiorescenza, coltivata in vaso), quante sono le piante che le hanno tutte e tre? Sapendo che tutte le piante esposte hanno almeno una caratteristica e che quelle che hanno esattamente una caratteristica sono 23, quante sono le piante esposte? [8; 68]

117 ESEMPIO DIGITALE **Matricole che leggono** Un'indagine tra 60 matricole di una grande università di studi economici ha prodotto i seguenti risultati:
19 leggono «Business Week»; 18 leggono «The Wall Street Journal»; 50 leggono «Fortune»; 13 leggono «Business Week» e «The Wall Street Journal»; 11 leggono «The Wall Street Journal» e «Fortune»; 13 leggono «Business Week» e «Fortune»; 9 leggono tutti e tre.

a. Quanti non leggono nessuna delle tre pubblicazioni?

b. Quanti leggono solo «Fortune»?

c. Quanti leggono solo «Business Week» e «The Wall Street Journal», ma non «Fortune»?

[USA Texas A&M, Department of Mathematics, High School Exam]

ALLENATI ALLA VERIFICA

▸ Analizzare e interpretare dati e grafici

1 VERO O FALSO? Dal diagramma di Venn si deduce che:

a. $(9+12) \in A$. V F

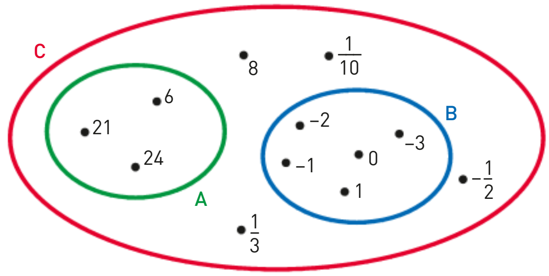
b. $[1:(21-12+1)] \in C$. V F

c. $(2 \cdot 5 - 2) \in B$. V F

d. $(3 \cdot 8) \notin A$. V F

e. $(9-12) \notin B$. V F

f. $(-2) \cdot (-3) \in C$. V F



2 VERO O FALSO? Considera $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «valanga»$\}$.

a. $\{x \mid x$ è una lettera della parola «lava»$\} \subseteq A$ V F

b. {alga} $\subseteq A$ V F

c. {v, a, n} $\not\subset A$ V F

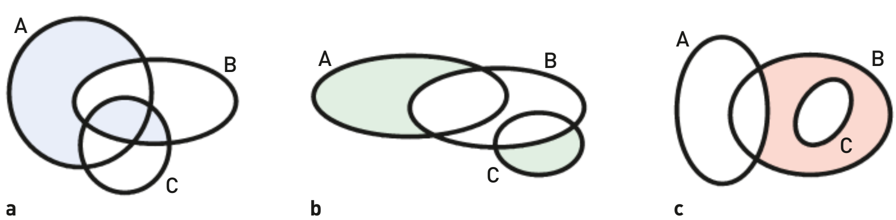
d. $\varnothing \subseteq A$ V F

e. {n, a, l, g, v} $\subseteq A$ V F

3 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, considera il sottoinsieme A costituito dai multipli di 2 e il sottoinsieme B costituito dai multipli di 3. Rappresenta mediante la proprietà caratteristica:

$A \cap B$; $A - B$; $(A \cup B) - A$.

4 IN FORMA GRAFICA Scrivi le espressioni che rappresentano la parte colorata in ognuno dei diagrammi seguenti.



▸ Utilizzare tecniche e procedure di calcolo

Considera $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 20\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un divisore di 20$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 6\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. Calcola il risultato delle seguenti espressioni, considerando i complementari rispetto a U e aiutandoti con i diagrammi di Venn.

5 $\overline{B} \cup \overline{C}$; $\overline{C \cup B}$; $\overline{A} \cap \overline{C}$; $\overline{A \cap C}$; $(A \cap B) \cup C$.

6 $B - A$; $(A \cup C) - B$; $(A - C) \times (C - A)$.

Dati A, B e C insiemi qualsiasi, verifica le seguenti uguaglianze utilizzando un diagramma di Venn.

7 $B \cap (A - C) = (A \cap B) - (B \cap C)$

8 $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

9 Determina A, B, C tali che:

$A \times A = \{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c)\}$; $B \cap C = \{a, e\}$;
$A \cap B = \{a\}$; $B - A = \{e, i, o, u\}$; $B \cup C = \{a, e, i, m, o, r, u\}$.

Risolvere problemi

10 In una classe di 28 studenti, 11 hanno conseguito la patente A1, 17 il PET o la patente A1, 3 l'ECDL e il PET, 4 l'ECDL e la patente A1, 2 solo l'ECDL e il PET, 3 il PET e la patente A1, 2 solo l'ECDL. Indica quanti studenti:

a. non hanno alcun certificato; **b.** li hanno tutti e tre; **c.** hanno un solo certificato.

11 Durante una giornata, il 25% dei clienti di un negozio ha comprato delle camicie, il 45% solo pantaloni, il 75% ha acquistato pantaloni, il 35% più di un tipo di indumento, il 15% sia giacche sia pantaloni ma nessuna camicia, il 5% ha acquistato giacche, camicie e pantaloni. Determina la percentuale di clienti che ha acquistato:

a. due tipi di capi; **b.** solo camicie; **c.** solo giacche.

12 ACCOGLIENZA TURISTICA **In agenzia** Il personale di un'agenzia viaggi si divide in tre gruppi in base ai tre ruoli svolti: il primo si occupa di prenotare gli alloggi (A), il secondo le attrazioni e i pasti (P), il terzo gli spostamenti (S).
Esistono dipendenti che ricoprono più ruoli e non esistono due dipendenti con lo stesso nome.
Rappresenta tramite un diagramma di Venn come sono suddivisi i compiti, sapendo che:

$S \cup P =$ {Ada, Beatrice, Carlo, Daria, Enrico, Filippo};

$S \cap P =$ {Ada, Daria};

$S \cup A =$ {Ada, Beatrice, Carlo, Daria, Enrico, Giacomo};

$S \cap A =$ {Ada};

$A \cup P =$ {Ada, Daria, Filippo, Giacomo}.

13 CUCINA **Insalata e insieme delle parti** Considera l'insieme $A =$ {olio, aceto, sale}.
Ogni suo sottoinsieme rappresenta un modo diverso di condire l'insalata.
Rappresenta quindi per elencazione l'insieme delle parti di A.

14 **Amici di click** Per una ricerca di mercato viene sottoposto ai ragazzi di una classe prima un questionario sull'utilizzo di tre apparecchi: computer, tablet, smartphone. Dalle risposte si ricava che tutti i ragazzi fanno uso almeno di uno strumento e precisamente:
18 ragazzi hanno il computer; 19 il tablet; 13 lo smartphone; 11 il computer e il tablet; 8 il tablet e lo smartphone; 9 il computer e lo smartphone; 7 tutti e tre gli apparecchi.
Determina quanti studenti hanno:

a. lo smartphone e il computer, ma non il tablet;
b. solo lo smartphone.

Quanti sono gli studenti della classe? [a) 2; b) 3; 29]

15 **Da Torino a…?** Una nuova compagnia ferroviaria vuole investire su una nuova tratta estera.
Esegue un'indagine su un campione di 100 persone per conoscere la loro preferenza fra le tratte Torino-Tolosa (TT), Torino-Praga (TP) e Torino-Barcellona (TB).
7 persone hanno dato la loro preferenza per tutte le tratte, 27 per TT e TP, 12 per TT e TB, 20 solo per TB, 52 per TT, 45 per TB. 3 persone non hanno dato nessuna preferenza.
Indica quante persone hanno dato la preferenza per:

a. TB e TP, ma non per TT;
b. TP;
c. TT e TP, ma non per TB;
d. TB e TT, ma non per TP;
e. la sola TP;
f. una sola tratta.

[a) 13; b) 52; c) 20; d) 5; e) 12; f) 52]

SEI PRONTO PER LA VERIFICA?

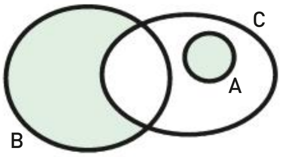
PROVE IN 1 ORA

PROVA A

1 Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ è un divisore di $8\}$, $B = \{x \mid x$ è una cifra del numero $8424\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$, rappresenta per elencazione:
a. $A \cup B \cup C$; **b.** $(C - A) \cup (A - C)$; **c.** $(C \cap B) \times B$; **d.** $(A \cup C) \cap B$.

2 Considera P, Q, R generici insiemi tali che $P \subset Q \subset R$. Calcola:
a. $(P \cup Q) \cap R$; **b.** $(P \cap Q) \cap (R - P)$.

3 Considera il diagramma di Venn in figura.



a. Scrivi un'espressione che rappresenti l'insieme colorato in verde.
b. Colora di giallo l'insieme $\overline{A}_C$.
c. Supponendo che non siano vuoti, stabilisci se i due insiemi verde e giallo costituiscono una partizione dell'insieme $B \cup C$.

4 Rappresenta per elencazione l'insieme delle parti di $A = \{x \mid x$ è una lettera della parola «olio»$\}$.

PROVA B

1 CUCINA **Ventotto primi** Una comitiva ordina 28 primi piatti conditi come segue:

- 11 con pomodoro;
- 17 con panna o pomodoro;
- 3 con pesto e panna;
- 4 con pesto e pomodoro;
- 2 con *solo* pesto e panna;
- 3 con panna e pomodoro;
- 2 con *solo* pesto.

Indica quanti piatti sono:
a. non conditi;
b. conditi con tutti e tre gli ingredienti;
c. conditi con uno solo dei tre ingredienti.

2 **Questione di geni** In una scuola ci sono 200 bambini. Ciascuno di loro può avere o non avere i lobi delle orecchie attaccati (O), la fossetta sul mento (F), le lentiggini sul volto (L).
Si sa che: 25 hanno solo O, 33 solo F, 67 solo una delle tre caratteristiche, 59 solo due di esse (di cui 15 hanno O e L, 18 hanno L e F), 128 hanno almeno uno dei tre tratti. Indica quanti bambini:
a. hanno tutte e tre le caratteristiche;
b. hanno solo le lentiggini;
c. non hanno alcuna caratteristica;
d. ne hanno più di una.

	PROVA A					PROVA B		
	1	2	3	4	Totale	1	2	Totale
Punti	20	25	40	15	100	55	45	100
Il tuo punteggio	....	....	....	....	....	....	....	....