

# SCHEDA DI RECUPERO SULLE FRAZIONI

## FRAZIONI EQUIVALENTI

**DEFINIZIONE:** data una frazione  $\frac{a}{b}$  si dice che  $\frac{x}{y}$  è equivalente ad  $\frac{a}{b}$  se e solo se  $a \cdot y = b \cdot x$  (uguaglianza dei "prodotti in croce").

Esempio:  $\frac{6}{4}$  è equivalente a  $\frac{3}{2}$ , infatti  $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$

**PROPRIETA' INVARIANTIVA DELLA DIVISIONE:** due frazioni sono equivalenti se e solo se si ottengono l'una dall'altra moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore di una di esse per uno stesso numero diverso da zero.

Esempio:  $\frac{24}{18}$  è equivalente a  $\frac{48}{36}$  perché  $\frac{48}{36} = \frac{24 \cdot 2}{18 \cdot 2}$   
 $\frac{24}{18}$  è equivalente a  $\frac{4}{3}$  perché  $\frac{4}{3} = \frac{24 : 6}{18 : 6}$

## ESERCIZIO 1

Scrivi 5 frazioni equivalenti a  $\frac{3}{5}$ .

## ESERCIZIO 2

Completa in modo da ottenere frazioni equivalenti:  $\frac{2}{3} = \frac{\dots}{27}$        $\frac{0}{3} = \frac{\dots}{7}$        $\frac{\dots}{\dots} = \frac{36}{14}$

## CLASSIFICAZIONE DI FRAZIONI

### TIPI DI FRAZIONI:

- $\frac{a}{b}$  è apparente se a è multiplo di b      Esempio:  $\frac{16}{4}$
- $\frac{a}{b}$  è propria se  $a < b$  (e quindi  $\frac{a}{b} < 1$ )      Esempio:  $\frac{2}{3}$
- $\frac{a}{b}$  è impropria se  $a > b$  (e quindi  $\frac{a}{b} > 1$ )      Esempio:  $\frac{3}{2}$

## ESERCIZIO 1

Scrivi nell'ordine una frazione impropria, una frazione propria e una frazione apparente.

(a)..... (b)..... (c).....

## CONFRONTO DI FRAZIONI

1. Se due frazioni confrontate hanno lo stesso denominatore, è minore quella con numeratore minore.

Esempio:  $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$

2. Se due frazioni hanno lo stesso numeratore, è minore quella con denominatore maggiore.

Esempio:  $\frac{7}{5} < \frac{7}{2}$

3. Se due frazioni  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{x}{y}$  non hanno né numeratori né denominatori uguali, possiamo affermare che  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$  se

$a \cdot y < b \cdot x$  e analogamente  $\frac{a}{b} > \frac{x}{y}$  se  $a \cdot y > b \cdot x$ .

Esempio:  $\frac{6}{5} < \frac{7}{2}$  perché  $6 \cdot 2 < 5 \cdot 7$        $\frac{3}{7} > \frac{2}{15}$  perché  $3 \cdot 15 > 7 \cdot 2$

## NOTA BENE

Ricorda che  $\frac{a}{b}$  indica a : b, quindi per confrontare due frazioni puoi ricorrere alla divisione.

**ESERCIZIO 1**

Inserisci tra le seguenti coppie di frazioni il simbolo opportuno scelto tra < (minore) e > (maggiore) e scrivi a fianco se hai usato per stabilirlo la regola (1), (2) o (3)

$$\frac{6}{7} \dots \frac{3}{7}$$

$$\frac{3}{7} \dots \frac{5}{11}$$

$$\frac{5}{6} \dots \frac{7}{8}$$

$$\frac{6}{11} \dots \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{2} \dots \frac{3}{4}$$

**ESERCIZIO 2**

Confronta le seguenti coppie di frazioni senza ricorrere alla divisione.

$$\frac{3}{2} \dots \frac{5}{6}$$

$$\frac{13}{11} \dots \frac{11}{13}$$

$$5 \dots \frac{26}{5}$$

$$\frac{15}{7} \dots \frac{28}{4}$$

$$\frac{7}{10} \dots \frac{25}{3}$$

**SEMPLIFICAZIONE DI FRAZIONI ALGEBRICHE****ESERCIZIO 1**

Completa la seguente tabella

frazione	frazione ridotta	operazione eseguita	
15/20	3/4	$\frac{15 : 5}{20 : 5}$	$5 = \text{M.C.D.}(15,20)^1$
17/3			
-15/81			
27/6			
-18/16			
300/25			
-7/21			
64/40			
45/15			
-625/75			

<sup>1</sup> Come si calcola l'M.C.D.?

- a) si scompongono i numeri in fattori primi;  
 b) l' **M.C.D.** è il prodotto dei fattori comuni presi con il minimo esponente.

Esempio

Calcoliamo il M.C.D. tra 54 e 36.

Scompongo in fattori primi:  $54 = 3^3 \cdot 2$  e  $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Prendo i fattori comuni con il minimo esponente:  $\text{M.C.D.}(54,36) = 2 \cdot 3^2 = 18$

## SOMMA ALGEBRICA DI FRAZIONI

### 1° Caso

**Frazioni con lo stesso denominatore:** la somma algebrica di due frazioni che hanno lo stesso denominatore è una frazione con lo stesso denominatore che ha come numeratore la somma algebrica dei numeratori.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Esempio

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{2+5}{3} = \frac{7}{3} \qquad \frac{4}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4-8}{5} = -\frac{4}{5}$$

### 2° Caso

**Frazioni con denominatore diversi:** se i denominatori sono diversi si trasformano le frazioni in altre equivalenti con lo stesso denominatore e successivamente si procede come nel 1° caso.

Esempio

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{6} = \frac{4}{6} + \frac{7}{6} = \frac{4+7}{6} = \frac{11}{6} \qquad \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = \frac{8-9}{12} = -\frac{1}{12}$$

NOTA: come denominatore comune si prende il **m.c.m.** dei denominatori.<sup>2</sup>

### ESERCIZIO 1

- a)  $-\left[-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{15}{16}-2\right)\right]=$
- b)  $\frac{7}{24}+\left(-8-\frac{1}{2}\right)-\left[1-\left(3-\frac{1}{8}\right)\right]=$
- c)  $-\frac{1}{3}-\left[1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)\right]=$

---

<sup>2</sup> Come si calcola il **m.c.m.**?

- c) si scompongono i numeri in fattori primi;  
d) il **m.c.m.** è il prodotto dei fattori comuni e non comuni presi con il massimo esponente.

Esempio

Calcoliamo il m.c.m. tra 54 e 36.

Scompongo in fattori primi:  $54 = 3^3 \cdot 2$  e  $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Prendo i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente m.c.m.:  $(54,36)=2^2 \cdot 3^3 = 108$

## MOLTIPLICAZIONE, DIVISIONE, ELEVAMENTO A POTENZA DI FRAZIONI

<b>Moltiplicazione</b>	Il prodotto di due frazioni è la frazione che ha come numeratore il prodotto dei numeratori delle due frazioni e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due frazioni. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$	$\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$
<b>Divisione</b>	Il quoziente di due frazioni è il prodotto della prima per l'inverso <sup>3</sup> della seconda. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$	$\frac{2}{3} : \frac{8}{9} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{18}{24}$
<b>Elevamento a potenza</b>	La potenza di una frazione è la frazione che si ottiene elevando a potenza il numeratore ed il denominatore della frazione data $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

### ESERCIZIO 2

- a)  $\left[\frac{4}{7} + 3 : \left(1 - \frac{1}{7}\right) \times \frac{1}{7}\right] : \left(-\frac{15}{4}\right) =$
- b)  $-\frac{2}{3} : \left\{ \left[ -2 + \left(1 - \frac{4}{9}\right) \right] \times \frac{1}{26} \right\} + (-3) : \left(-\frac{3}{4} + 1\right) =$
- c)  $-12 + \left\{ \left(-\frac{3}{4}\right)^2 : \frac{27}{(-2)^4} - \left[ -2^5 \times \left(1 - \frac{3}{4}\right)^3 - 10 \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \right] \right\} =$

3

Due **numeri** si dicono **inversi** se il loro prodotto è uguale a 1.

L'**inverso di un numero intero** è una frazione che ha come numeratore 1 e come denominatore il numero dato.

L'**inverso di una frazione** è una frazione che ha il numeratore e il denominatore scambiati rispetto alla frazione data.

L'**inverso di zero non esiste**.

### ESERCIZIO

numero	-1	+2	+1/2	-3/4		-5		-1/3	0,2			0	
inverso					1		-2				$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1,5

## ORDINE IN CUI SI ESEGUONO LE OPERAZIONI IN UNA ESPRESSIONE

Se in un'espressione numerica si trovano le quattro operazioni fondamentali e le potenze di numeri relativi, si eseguono nell'ordine:

- le potenze
- le moltiplicazioni e le divisioni secondo l'ordine con cui si presentano
- le addizioni e le sottrazioni secondo l'ordine con cui si presentano

Se l'espressione contiene parentesi, si inizia con il calcolo delle espressioni contenute nella parentesi più interne; dopo ciascun calcolo parziale, si trascrive per intero il resto dell'espressione e si continua con questo procedimento fino a completa eliminazione delle parentesi.

Esempio 1:

Calcoliamo per esercizio il valore della seguente espressione.

$$\begin{aligned} & \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^3 \cdot (-4) + \left( -\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)^2 \right]^2 : \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^3 \cdot (-6) + \frac{10}{9} \right]^2 = \\ & \left[ -\frac{1}{8} \cdot (-4) + \left( -\frac{8}{27} \right) \cdot \frac{9}{16} \right]^2 : \left[ \frac{8}{27} \cdot (-6) + \frac{10}{9} \right]^2 = \\ & \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right]^2 : \left[ -\frac{16}{9} + \frac{10}{9} \right]^2 = \\ & \left[ \frac{3-1}{6} \right]^2 : \left[ \frac{-16+10}{9} \right]^2 = \\ & \left[ \frac{1}{3} \right]^2 : \left[ -\frac{2}{3} \right]^2 = \left[ -\frac{1}{3} : \frac{2}{3} \right]^2 = \left[ -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \right]^2 = \left[ -\frac{1}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Esempio 2:

$$\begin{aligned} & \left( -1 + \frac{1}{5} \right) : \left( 3 + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \\ & \left( \frac{-5+1}{5} \right) : \left( \frac{36+6-20+3}{12} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \\ & \left( -\frac{4}{5} \right) : \left( \frac{25}{12} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \left( -\frac{4}{5} \right) \cdot \left( \frac{12}{25} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = -4 \end{aligned}$$

NOTA

Ricorda che se l'espressione contiene una moltiplicazione seguita da una divisione o, viceversa, una divisione seguita da una moltiplicazione, le operazioni devono essere eseguite nell'ordine in cui sono scritte.

**E' quindi errato effettuare le operazioni seguendo un ordine diverso da quello in cui compaiono.**

Infatti nell'esempio precedente se si esegue prima il prodotto e solo in secondo tempo il quoziente, si avrà un risultato diverso come puoi osservare nei passaggi successivi.

$$\begin{aligned} & \left( -1 + \frac{1}{5} \right) : \left( 3 + \frac{1}{2} - \frac{5}{3} + \frac{1}{4} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \\ & \left( \frac{-5+1}{5} \right) : \left( \frac{36+6-20+3}{12} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \\ & \left( -\frac{4}{5} \right) : \left( \frac{25}{12} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \left( -\frac{4}{5} \right) : \left( \frac{25}{12} \right) \cdot \left( \frac{125}{12} \right) = \left( -\frac{4}{5} \right) : \left( \frac{625}{144} \right) = \left( -\frac{4}{5} \right) \cdot \left( \frac{144}{625} \right) = -\frac{576}{3125} \end{aligned}$$

**ESERCIZI DI RIEPILOGO** (nelle espressioni in cui compaiono le potenze utilizza le proprietà delle stesse<sup>4</sup>)

$$\text{a) } -\frac{2}{9}\left(-2-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{3}\left(-\frac{5}{2}+\frac{2}{5}+2\frac{3}{10}\right) \quad [-2]$$

$$\text{b) } \left[-\frac{4}{3}+\frac{8}{5}\left(\frac{3}{2}-2+\frac{9}{40}\frac{5}{3}\right)\right]\left(-\frac{15}{46}\right)-10\left(-\frac{2}{5}+\frac{3}{20}\right) \quad [3]$$

$$\text{c) } \frac{10}{3}-\frac{4}{5}\left\{-2+\frac{9}{5}\left[\left(-\frac{2}{9}+\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{27}{44}\right)-\frac{1}{4}\right]\right\}-\frac{35}{6} \quad [0]$$

$$\text{d) } \frac{1}{4}-\frac{3}{11}\left\{\left[-\frac{1}{5}-\frac{8}{45}\left(\frac{1}{9}-\frac{11}{18}\right)-\frac{1}{72}\right]\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\right\} \quad \left[-\frac{1}{20}\right]$$

$$\text{e) } \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{15}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right):\left(\frac{1}{4}+1-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{16}{5}+\frac{3}{10}\right):\left(-\frac{1}{3}\right) \quad \left[\frac{15}{2}\right]$$

$$\text{f) } \frac{4}{3}-\frac{5}{21}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{30}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{3}{8}-\frac{13}{24}\right):\left(-\frac{5}{3}\right)\right] \quad \left[\frac{11}{9}\right]$$

$$\text{g) } \left\{\frac{1}{5}-\frac{80}{51}\left[\left(1-\frac{7}{25}\right):\frac{27}{20}-\frac{1}{4}\right]\right\}:\left[\frac{3}{5}-\frac{25}{14}\left(\frac{7}{30}-\frac{1}{6}\right):\frac{10}{49}\right]:\frac{55}{9} \quad \left[-\frac{12}{5}\right]$$

$$\text{h) } \left[\left(-\frac{3}{7}+\frac{4}{5}\right):\left(\frac{1}{3}+1-\frac{2}{21}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{32}\right):\left(-\frac{21}{8}\right)-\frac{1}{3}\right]:$$

$$:\left\{\left[\left(\frac{1}{21}+\frac{4}{7}\right)-\frac{60}{7}:(-40)\right]\frac{11}{15}-\frac{1}{2}\right\} \quad \left[-\frac{21}{20}\right]$$

$$\text{i) } \left\{\left[-\frac{2}{5}\left(\frac{15}{2}-5\right)+3\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(4-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{2}{19}\right)\right]:\left(-\frac{2}{5}\right)+15\right\}:\left(-\frac{33}{2}\right)$$

$$\quad \left[-\frac{7}{6}\right]$$

$$\text{e) } \left\{\left[\frac{1}{25}-\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}\right):\left(\frac{2}{3}-2\right)\frac{16}{15}\right]:\left[\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)\frac{7}{5}\right]\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right\}+\frac{5}{8} \quad \left[-\frac{15}{8}\right]$$

$$\text{f) } \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^5:\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \quad \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]$$

$$\text{g) } \left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]^3:\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right\}^2:\left\{\left[(-2)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2:\frac{3}{8}\right\}^4 \quad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]$$

$$\text{h) } \left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3:\left(-\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left[\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

<sup>4</sup> Per le proprietà delle potenze vedi anche "Scheda di recupero sulle potenze"

- i)  $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(\frac{2}{3}\right)^7\right]^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^6$  [1]
- j)  $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 : \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^6\right]$  [1]
- k)  $\left\{\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^2\right]^3 : \left(-\frac{5}{6}\right)^9\right\}^2 : \left[\left(-\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)\right]^2$   $\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^{10}\right]$
- l)  $\left\{\left[\left(+\frac{7}{3}\right)^{10} : \left(-\frac{7}{3}\right)^6\right]^2 \cdot \left[\left(-\frac{7}{3}\right)^8 : \left(-\frac{7}{3}\right)^3\right]\right\} : \left(-\frac{7}{3}\right)^{11}$   $\left[\frac{49}{4}\right]$
- m)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 : \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 : \left(\frac{1}{4}\right)^7 - \left(-\frac{3}{2}\right)^3 : \left(-\frac{3}{2}\right)^2$   $\left[\frac{13}{8}\right]$
- n)  $\left(-\frac{3}{10}\right)^6 \cdot \left[\left(-\frac{3}{10}\right)^4 : \left(-\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)\right]^3 : \left[\left(-\frac{3}{10}\right)^3\right]^4$  [1]
- o)  $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^2\right]^5 : \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^7 : \left(-\frac{1}{5}\right)^4\right]^2$  [1]
- p)  $\left\{\left[\left(+\frac{3}{4}\right)^2\right]^2\right\}^3 \cdot \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2\right]^2 : \left\{\left[\left(+\frac{3}{4}\right)^2\right]^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^7\right\}^2$  [1]